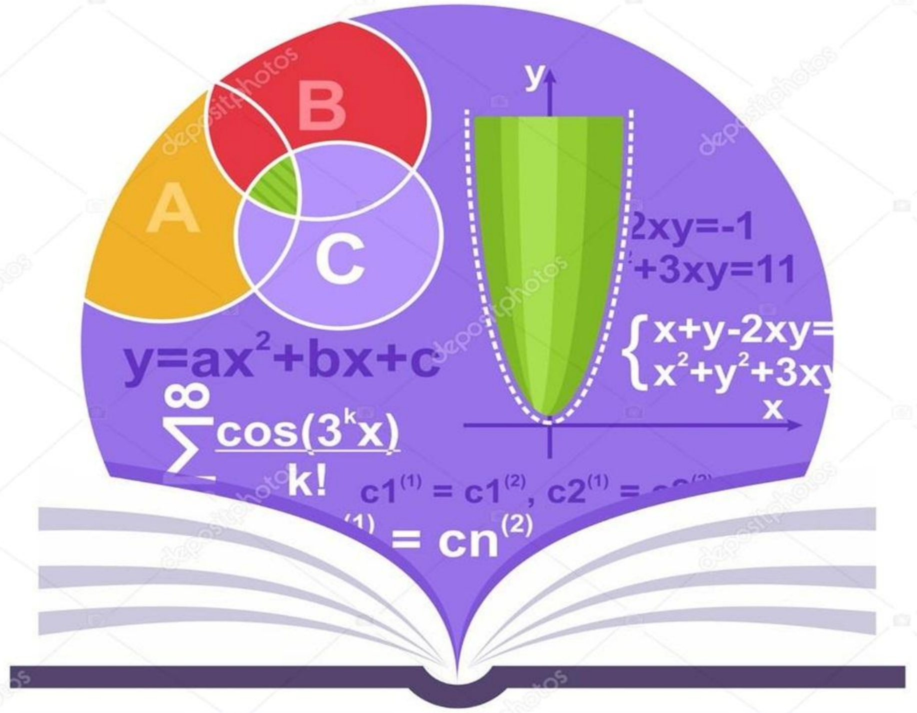
ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ХАЛҚ ТАЪЛИМИ ВАЗИРЛИГИ

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТОШКЕНТ
ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ХАЛҚ ТАЪЛИМИ
ХОДИМЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА
УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ
ҲУДУДИЙ МАРКАЗИ

4.3
МОДУЛ

ЎҚУВ – УСЛУБИЙ МАЖМУА

ТАНЛОВ ЎҚУВ МОДУЛИ



ТОШКЕНТ-2018

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ХАЛҚ ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

НИЗОМИЙ НОМИДАГИ ТОШКЕНТ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ХАЛҚ ТАЪЛИМИ ХОДИМЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ҲУДУДИЙ МАРКАЗИ

ТАНЛОВ ЎҚУВ

МОДУЛИ БЎЙИЧА

ЎҚУВ-УСЛУБИЙ МАЖМУА

Тошкент – 2018

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Халқ таълими вазирлигининг 2018 йил _____ _________даги ____-сонли буйруғи билан тасдиқланган математика фани ўқитувчиларининг малакасини ошириш тоифа йўналиши ўқув режаси ва дастури асосида тайёрланди

Тузувчилар: Б.Қ.Ҳайдаров – Низомий номидаги ТДПУ ҳузуридаги халқ таълими ходимларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш ҳудудий маркази, “Аниқ ва табиий фанлар методикаси” кафедраси доценти, ф.-м.ф.н.

Д.Э.Давлетов – Низомий номидаги ТДПУ, математика ўқитиш методикаси кафедраси мудири, ф.-м.ф.н. доцент.

Ж.Ю.Сапарбоев – Низомий номидаги ТДПУ, математика ўқитиш методикаси кафедраси катта ўқитувчиси

Тақризчилар: А.А.Акмалов– Низомий номидаги ТДПУ, “Математика ва уни ўқитиш методикаси” кафедраси мудири, п.ф.н.

Ғойибназарова Г.Н. – Низомий номидаги ТДПУ, математика ўқитиш методикаси доценти, п.ф.н.

Ўқув-услубий мажмуа А.Авлоний номидаги Халқ таълими тизими раҳбар ва мутахассис ходимларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш институти илмий кенгашининг 2018 йил ______________даги ______- сонли баённомаси билан маъқулланган ва нашрга тавсия этилган.

МУНДАРИЖА

ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сонли Фармони, 2018 йил 5 сентябрдаги “Халқ таълими тизимига бошқарувнинг янги тамойилларини жорий этиш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-3931- сонли Қарорида педагог ходимларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш таълим тизими олдида турган долзарб масала сифатида белгилаб ўтилган.

Шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 6 апрелдаги “Умумий ўрта ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълимининг давлат таълим стандартларини тасдиқлаш тўғрисида”ги 187-сонли Қарорида белгиланган вазифалар замонавий талаблар асосида математика фани ўқитувчилари малакасини ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш, ўқитувчиларнинг жорий эҳтиёжларидан келиб чиқиб, турли танлов мавзуларини тақдим этиш орқали уларнинг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришни тақозо этади.

Танлов ўқув модулининг ишчи ўқув дастури математика фани ўқитувчилари малакасини ошириш курсининг ўқув дастури асосида тузилган бўлиб, у математика фани ўқитувчиларининг жорий эҳтиёжларидан келиб чиқиб, фан ўқув дастурига янги киритилган ва ўзлаштирилиши қийин бўлган мавзуларнинг назарий асослари ва ўқитиш методларининг мазмун ва моҳиятини очиб беради.

ТАНЛОВ ЎҚУВ МОДУЛИНИНГ МАҚСАДИ ВА ВАЗИФАЛАРИ

Модулнинг мақсади ва вазифалари: математика фани ўқитувчиларининг жорий эҳтиёжларидан келиб чиқиб, фан ўқув дастурига янги киритилган, долзарб ва ўзлаштирилиши қийин бўлган мавзуларнинг назарий асослари, ўқитиш методларини қўллаш компетенцияларини ривожлантириш.

Танлов ўқув модули бўйича тингловчиларнинг билим, кўникма, малака ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

Тингловчи:

- тингловчиларда мактаб математика курсида танлов мавзулари мазмунига оид билимларни **билиши;**
- математика дарсларида танлов мавзуларини ўқитишнинг замонавий таълим методларидан фойдаланиш **кўникмаларига эга бўлиши лозим.**

Танлов ўқув модулини ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

Танлов ўқув модули учун жами 4 аудитория соати ажратилган бўлиб, унинг мавзулари (таркиби) қуйида тавсия этилаётган мавзулар рўйхатидан танланади ва жами соат ҳажмидан келиб чиқиб шакллантирилади. Тингловчилар томонидан энг кўп овоз тўплаган ўқув модули танланади.

Танлов ўқув модули асосан назарий ёки амалий машғулотлар шаклида олиб борилади. Назарий машғулотларда мактаб математика курсида танлов ўқув модули мазмунига оид маълумотлар берилади.

Амалий машғулотларда математика дарсларида танлов мавзуларини ўқитишнинг замонавий таълим методларидан фойдаланиш намойиш қилинади.

Машғулотларда техник воситалардан, экспресс-сўровлар, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш ва бошқа интерактив таълим усулларидан фойдаланиш назарда тутилади.

Танлов ўқув модулининг ўқув режадаги бошқа фанлар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

Фан мазмуни ўқув режадаги “Илғор таълим-тарбия технологиялари ва жаҳон тажрибаси”, “Математика фанини ўқитиш методикаси” ўқув фанлари билан узвий боғланган ҳолда ўқитувчиларнинг касбий педагогик тайёргарлик даражасини орттиришга хизмат қилади.

Танлов ўқув модулининг услубий жиҳатдан узвий кетма-

кетлиги

Асосий қисмда фаннинг мавзулари мантиқий кетма-кетликда келтирилади. Ҳар бир мавзунинг моҳияти асосий тушунчалар ва тезислар орқали очиб берилади. Бунда мавзу бўйича тингловчиларга етказилиши зарур бўлган билим, кўникма ва малакалар назарда тутилади.

Танлов ўқув модулининг таълимдаги ўрни

Тингловчиларга математика дарсларида танлов мавзулари модули мавзуларини ўқитиш методларини қўллаш кўникмаларини шакллантириш орқали таълим самарадорлигини таъминлашдан иборат.

ТАНЛОВ МАВЗУЛАРИДАН НАМУНАЛАР

1- ТАНЛОВ МАВЗУСИ: МАКТАБ МАТЕМАТИКА КУРСИДА КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ ЎҚИТИШ

Мавзу бўйича соатлар тақсимоти

№	Фан мавзулари	Ҳаммаси	Жами ўқув юкламаси	Жумладан назарий	Жумладан амалий	Жумладан кўчма машғулот	Мустақил таълим
1.	Мактаб математика курсида комбинаторика элементлари ўқитиш мазмуни	2	2	2	-	-	-
2.	Математика дарсларида комбинаторика элементларини ўқитиш методлари	2	2		2	-	-
	Жами	**4**	**4**	**2**	**2**	-	-

НАЗАРИЙ ВА АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Мактаб математика курсида комбинаторика элементлари ўқитиш мазмуни

Комбинаторика масалалари ва уларнинг турлари. Ўрин алмаштиришлар, ўринлаштиришлар ва гуруҳлашлар (бирлашмалар). Факториал. Паскаль учбурчаги ва комбинациялар. Нъютон биноми формуласи ва комбинациялар.

2-Мавзу: Математика дарсларида комбинаторика элементларини ўқитиш методлари

Комбинаторика масалаларини ечишнинг қўшиш ва кўпайтириш қоидалари. Комбинаторика масалаларини ечишнинг саралаш, жадвал ва "дарахтлар" усуллари. Ўрин алмаштиришлар, ўринлаштиришлар ва гуруҳлашларга доир масалаларни ажратиш алгоритми ва уларни ечишга доир умумий формулалари.

2- ТАНЛОВ МАВЗУСИ: МАТЕМАТИКА ДАРСЛАРИДА ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ВА ТЕКИСЛИКЛАРНИ ЎҚИТИШ МЕТОДИКАСИ

Мавзу бўйича соатлар тақсимоти

№	Фан мавзулари	Ҳаммаси	Жами ўқув юкламаси	Жумладан			Мустақил таълим
				назарий	амалий	кўчма машғулот	
3.	Фазода тўғри чизиқлар ва текисликларни ўқитиш мазмуни	2	2	2	-	-	-
4.	Фазода тўғри чизиқлар ва текисликларнинг параллел ва перпендикулярлигини ўқитиш	2	2		2	-	-
Жами		**4**	**4**	**2**	**2**	**-**	**-**

НАЗАРИЙ ВА АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Фазода тўғри чизиқлар ва текисликларни ўқитиш мазмуни

Фазода тўғри чизиқлар ва текисликлар; кўпёқлар ва уларнинг содда кесимларини ясаш; амалий машқ ва татбиқ.

2-Мавзу: Фазода тўғри чизиқлар ва текисликларнинг параллеллигини ўқитиш

Фазода икки тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашуви; фазода текислик ва тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашуви; фазода икки текисликнинг ўзаро жойлашуви; фазода параллел проекция; амалий машқ ва татбиқлар

3-Мавзу: Фазода тўғри чизиқ ва текисликнинг перпендикулярлигини ўқитиш

Фазода перпендикулар тўғри чизиқ ва текисликлар; фазода перпендикулар, оғма ва масофа; уч перпендикулярлар ҳақидаги теорема; фазода текисликларнинг перпендикулярлиги; амалий машқ ва татбиқ.

3- ТАНЛОВ МАВЗУСИ: МАТЕМАТИКА ДАРСЛАРИДА АНИҚ ИНТЕГРАЛ ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИНИ ЎҚИТИШ МЕТОДИКАСИ

Мавзу бўйича соатлар тақсимоти

№	Фан мавзулари	Ҳаммаси	Жами ўқув юкламаси	Жумладан			Мустақил таълим
				назарий	амалий	кўчма машғулот	
1.	Аниқ интеграл ва Нютон-Лейбниц формуласи, уларни ўқитиш методикаси.	2	2		2	-	-
2.	Аниқ интегралнинг татбиқларини ўқитиш методикаси	2	2	-	2	-	-
Жами		**4**	**4**		**4**	**-**	**-**

НАЗАРИЙ ВА АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Аниқ интеграл ва Нютон-Лейбниц формуласи, уларни ўқитиш методикаси.

Аниқ интеграл таърифи, Нютон-Лейбниц формуласи. Аниқ интеграл хоссалари ва уларга оид мисоллар ечиш.

2-Мавзу: Аниқ интегралнинг татбиқларини ўқитиш методикаси Аниқ интегралнинг татбиқлари ҳақида умумий маълумотлар бериш, ёй узунлиги, текис фигура юзини топиш, аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш ларга доир мисол ва масалалар ечиш.

4- ТАНЛОВ МАВЗУСИ: МАТЕМАТИКА ДАРСЛАРИДА ҲОСИЛА ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИНИ ЎҚИТИШ МЕТОДИКАСИ

Мавзу бўйича соатлар тақсимоти

№	Фан мавзулари	Ҳаммаси	Жами ўқув юкламаси	Жумладан			Мустақил таълим
				назарий	амалий	кўчма машғулот	
1.	Ҳосила ва унинг маънолари, уларни ўқитиш методикаси.	2	2		2	-	-
2.	Ҳосиланинг татбиқларини ўқитиш методикаси	2	2		2		
Жами		**4**	**4**		**4**	**-**	**-**

НАЗАРИЙ ВА АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Ҳосила ва унинг маънолари, уларни ўқитиш методикаси.

Ҳосилани ҳисоблаш қоидалари, ҳосиланинг геометрик ва физик маънолари ва уларга оид мисоллар ечиш.

2-Мавзу: Ҳосиланинг татбиқларини ўқитиш методикаси.

Ҳосиланинг татбиқлари. Ҳосила ёрдамида функцияни текшири ва графигини ясаш, экстремал масалаларда ҳосиланинг татбиқларига доир мисол ва масалалар ечиш.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади:

- маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва технологияларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);
- давра суҳбатлари (кўрилаётган топшириқлар ечимлари бўйича таклиф бериш қобилиятини ошириш, эшитиш, идрок қилиш ва мантиқий хулосалар чиқариш);

- баҳс ва мунозаралар (топшириқлар ечими бўйича далиллар ва асосли аргументларни тақдим қилиш, эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

1. “SWOT-таҳлил” методи.

Методнинг мақсади: мавжуд назарий билимлар ва амалий тажрибаларни таҳлил қилиш, таққослаш орқали муаммони ҳал этиш йўлларни топишга, билимларни мустаҳкамлаш, такрорлаш, баҳолашга, мустақил, танқидий фикрлашни, ностандарт тафаккурни шакллантиришга хизмат қилади.

Намуна: Муаммоли таълим ёндашувларининг SWOT таҳлилини ушбу жадвалга туширинг.

S	Муаммоли таълим ёндашувларининг кучли томонлари	
W	Муаммоли таълим ёндашувларининг кучсиз томонлари	
O	Муаммоли таълим ёндашувларининг имкониятлари (ички)	
T	Муаммоли таълим ёндашувларини амалда қўллашдаги тўсиқлар (ташқи)	

1. “Кейс-стади” методи

«Кейс-стади» - инглизча сўз бўлиб, («case» – аниқ вазият, ҳодиса, «study» – ўрганмоқ, таҳлил қилмоқ) аниқ вазиятларни ўрганиш, таҳлил қилиш асосида ўқитишни амалга оширишга қаратилган метод ҳисобланади. Кейсда очиқ ахборотлардан ёки аниқ воқеа-ҳодисадан вазият сифатида таҳлил учун фойдаланиш мумкин.

Мазкур метод муаммоли таълим методидан фарқли равишда реал вазиятларни ўрганиш асосида аниқ қарорлар қабул қилишга асосланади. Агар у ўқув жараёнида маълум бир мақсадга эришиш йўли сифатида қўлланилса, метод характерига эга бўлади, бирор бир жараённи тадқиқ этишда босқичма-босқич, маълум бир алгоритм асосида амалга оширилса, технологик жиҳатни ўзида акс эттиради

“Кейс методи” ни амалга ошириш босқичлари

Иш босқичлари	**Фаолият шакли ва мазмуни**
1-босқич: Кейс ва унинг ахборот таъминоти билан таништириш	✓ якка тартибдаги аудио-визуал иш; ✓ кейс билан танишиш(матнли, аудио ёки медиа шаклда); ✓ ахборотни умумлаштириш; ✓ ахборот таҳлили; ✓ муаммоларни аниқлаш
2-босқич: Кейсни аниқлаштириш ва ўқув топшириғни белгилаш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муаммоларни долзарблик иерархиясини аниқлаш; ✓ асосий муаммоли вазиятни белгилаш
3-босқич: Кейсдаги асосий муаммони таҳлил этиш орқали ўқув топшириғининг ечимини излаш, ҳал этиш йўлларини ишлаб чиқиш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил ечим йўлларини ишлаб чиқиш; ✓ ҳар бир ечимнинг имкониятлари ва тўсиқларни таҳлил қилиш; ✓ муқобил ечимларни танлаш
4-босқич: Кейс ечимини ечимини шакллантириш ва асослаш, тақдимот.	✓ якка ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил вариантларни амалда қўллаш имкониятларини асослаш; ✓ ижодий-лойиҳа тақдимотини тайёрлаш; ✓ якуний хулоса ва вазият ечимининг амалий аспектларини ёритиш

“Кейс-стади” методининг ўзига хос хусусиятлари

- Изланишга доир фаолиятнинг мавжуд бўлиши.
- Жамоавий ва гуруҳларда ўқитиш.
- Индивидул, гуруҳли ва жамоавий иш шакллари интегратsiяси.
- Хилма-хил ўқув лойиҳаларини ишлаб чиқиш.
- Муваффақиятга эришиш учун талабаларнинг ўқув-билиш фаолиятини рағбатлантириш

Кейс ҳаракатлари ўз ичига қуйидагилар саволлар бўйича фаолиятни қамраб олади:

- Ким? (Who?),
- Қачон? (When?),
- Қаерда? (Where?),
- Нима учун? (Why?),
- Қандай?/ Қанақа? (How?),
- Нима? (натижа) (What?).

Кейс. 5- синф дарслигининг сизга тақдим этилган битта мавзуси материаллари бўйича кейс топшириғини тузинг;

Бу кейс асосида ўтиладиган дарсни лойиҳалаштиринг;

У бўйича тақдимот тайёрланг ва уни намойиш этинг;

2. «ФСМУ» методи

Технологиянинг мақсади: Мазкур технология иштирокчилардаги умумий фикрлардан хусусий хулосалар чиқариш, таққослаш, қиёслаш орқали ахборотни ўзлаштириш, хулосалаш, шунингдек, мустақил ижодий фикрлаш кўникмаларини шакллантиришга хизмат қилади. Мазкур технологиядан маъруза машғулотларида, мустаҳкамлашда, ўтилган мавзуни сўрашда, уйга вазифа беришда ҳамда амалий машғулот натижаларини таҳлил этишда фойдаланиш тавсия этилади.

Технологияни амалга ошириш тартиби:

- қатнашчиларга мавзуга оид бўлган якуний хулоса ёки ғоя таклиф этилади;
- ҳар бир иштирокчига ФСМУ технологиясининг босқичлари ёзилган қоғозларни тарқатилади:

Ф	• фикрингизни баён этинг
С	• фикрингизни баёнига сабаб кўрсатинг
М	• кўрсатган сабабингизни исботлаб мисол келтиринг
У	• фикрингизни умумлаштиринг

- иштирокчиларнинг муносабатлари индивидуал ёки гуруҳий тартибда тақдимот қилинади.

ФСМУ таҳлили қатнашчиларда касбий-назарий билимларни амалий машқлар ва мавжуд тажрибалар асосида тезроқ ва муваффақиятли ўзлаштирилишига асос бўлади.

Намуна.

Фикр: PISA ва TIMSS қиёсий халқаро тадқиқотлар натижалари мамлакатимизда математика фанини ўқитиш тизимини таҳлил қилиш ва ткомиллаштиришни тақозо этади.

Топшириқ: Мазкур фикрга нисбатан муносабатингизни ФСМУ орқали таҳлил қилинг.

3. “Тушунчалар таҳлили” методи

Методнинг мақсади: мазкур метод ўқувчилар ёки қатнашчиларни мавзу буйича таянч тушунчаларни ўзлаштириш даражасини аниқлаш, ўз билимларини мустақил равишда текшириш, баҳолаш, шунингдек, янги мавзу буйича дастлабки билимлар даражасини ташҳис қилиш мақсадида қўлланилади. Методни амалга ошириш тартиби:

- иштирокчилар машғулот қоидалари билан таништирилади;
- ўқувчиларга мавзуга ёки бобга тегишли бўлган сўзлар, тушунчалар номи туширилган тарқатмалар берилади (индивидуал ёки гуруҳли тартибда);
- ўқувчилар мазкур тушунчалар қандай маъно англатиши, қачон, қандай ҳолатларда қўлланилиши ҳақида ёзма маълумот берадилар;
- белгиланган вақт якунига етгач ўқитувчи берилган тушунчаларнинг тугри ва тулиқ изоҳини укиб эшиттиради ёки слайд орқали намойиш этади;
- ҳар бир иштирокчи берилган тугри жавоблар билан узининг шахсий муносабатини таққослайди, фарқларини аниқлайди ва ўз билим даражасини текшириб, баҳолайди.

Намуна: “Модулдаги таянч тушунчалар таҳлили”

Тушунчалар	Сизнингча бу тушунча қандай маънони англатади?	Қўшимча маълумот

Изоҳ: Иккинчи устунчага қатнашчилар томонидан фикр билдирилади. Мазкур тушунчалар ҳақида қўшимча маълумот глоссарийда келтирилган.

4. Венн диаграммаси методи

Венн диаграммаси - график кўринишда бўлиб, олинган натижаларни умумлаштириб, улардан бир бутун хулоса чиқаришга, икки ва ундан ортиқ предметларни (кўриниш, факт, тушунча) таққослаш, таҳлил қилиш ва ўрганишда қўлланилади. Диаграмма икки ва ундан ортиқ айланани кесишмасидан ҳосил бўлади.

Методнинг мақсади: Бу метод график тасвир орқали ўқитишни ташкил этиш шакли бўлиб, у иккита ўзаро кесишган айлана тасвири орқали ифодаланади. Мазкур метод турли тушунчалар, асослар, тасавурларнинг анализ ва синтезини икки аспект орқали кўриб чиқиш, уларнинг умумий ва фарқловчи жиҳатларини аниқлаш, таққослаш имконини беради.

Методни амалга ошириш тартиби:

- иштирокчилар икки кишидан иборат жуфтликларга бирлаштириладилар ва уларга кўриб чиқилаётган тушунча ёки асоснинг ўзига хос, фарқли жиҳатларини (ёки акси) доиралар ичига ёзиб чиқиш таклиф этилади;
- навбатдаги босқичда иштирокчилар тўрт кишидан иборат кичик гуруҳларга бирлаштирилади ва ҳар бир жуфтлик ўз таҳлили билан гуруҳ аъзоларини таништирадилар;

- жуфтликларнинг таҳлили эшитилгач, улар биргалашиб, кўриб чиқилаётган муаммо ёҳуд тушунчаларнинг умумий жиҳатларини (ёки фарқли) излаб топадилар, умумлаштирадилар ва доирачаларнинг кесишган қисмига ёзадилар.

Намуна: PISA ва TIMSS халқаро тадқиқотлар натижаларини қиёсий таҳлил қилинг.

5. Кичик гуруҳларда ишлаш методи

Кичик гуруҳларда ишлаш орқали ўрганиш - маълум муаммонинг ечимини топишга ва ўқувчилар фаоллигини оширишга қаратилган дарсдаги ижодий ҳамкорликдаги иш. Босқичлари: гуруҳларга бўлиш, муаммони гуруҳларда мухокама қилиш, муаммонинг ечимлари тақдимоти, хулосалаш.

Кичик гуруҳларда ҳамкорликда ўқитиш

Бу ёндошувда кичик гуруҳлар 4 та ўқувчидан ташкил топади. Ўқитувчи аввал мавзуни тушунтиради, сўнгра ўқувчиларнинг мустақил ишлари ташкил этилади. Ўқувчиларга берилган ўқув топшириқлари 4 қисмга ажратилиб, ҳар бир ўқувчи топшириқнинг маълум қисмини бажаради. Топшириқ якунида ҳар бир ўқувчи ўзи бажарган қисм юзасидан фикр юритиб, ўртоқларини ўқитади, сўнгра гуруҳ аъзолари томонидан топшириқ юзасидан умумий хулоса чиқарилади. Ўқитувчи ҳар бир кичик гуруҳ ахборотини тинглайди ва тест саволлари ёрдамида билимларни назорат қилиб баҳолайди.

Ўқувчиларнинг кичик гуруҳлардаги ўқув фаолияти ўйин (турнир, мусобақа) шаклида, индивидуал тарзда ҳам ташкил этилиши мумкин

Кичик гуруҳларда ижодий изланишни ташкил этиш

Кичик гуруҳларда ижодий изланишни ташкил этиш методи 1976 йили Тел-Авив университети профессори Ш.Шаран томонидан ишлаб чиқилган. Бу методда кўпроқ ўқувчиларнинг мустақил ва ижодий ишига эътибор қаратилади.

Ўқувчилар алоҳида-алоҳида ёки 6 кишилик кичик гуруҳларда ижодий изланиш олиб борадилар. Ижодий изланиш кичик гуруҳларда ташкил этилганда дарсда ўрганиш лозим бўлган ўқув материали кичик қисмларга ажратилади. Кейин бу қисмлар юзасидан топшириқлар ҳар бир ўқувчига тақсимланади. Шундай қилиб, ҳар бир ўқувчи умумий топшириқнинг бажарилишига ўз хиссасини қўшади. Кичик гуруҳларда топшириқ юзасидан мунозара ўтказилади. Гуруҳ аъзолари биргаликда маъруза тайёрлайди ва синф ўқувчилари ўртасида ўз ижодий изланишлари натижасини эълон қилади. Кичик гуруҳлар ўртасида ўтказилган ўқув баҳси, мунозара ўқувчилар жамоасининг ҳамкорликда бажарган мустақил фаолиятининг натижаси, якуни саналади. Ҳамкорликда ишлаш натижасида қўлга киритилган муваффақиятлар синф жамоасининг ҳар бир ўқувчининг мунтазам ва фаол ақлий меҳнат қилишига, кичик гуруҳларни, умуман синф жамоасини жипслаштиришга, аввал ўзлаштирилган билим, кўникма ва малакаларни янги кутилмаган вазиятларда қўлланиб, янги билимларнинг ўзлаштиришига боғлиқ бўлади.

6. Муаммоли таълим методи

Таълим жараёнида ўқувчиларнинг билиш фаолиятини фаоллаштириш ҳамда уларнинг интелектуал имкониятларидан юқори даражада фойдаланиш қуйидаги умумий омилларга боғлиқ бўлади:

- Ўрганилаётган мавзу юзасидан муаммоли саволлар тизими тузиш;
- Қўйилган муаммоли саволлар тизими асосида суҳбат методи орқали тушунтириладиган тема материалларини ўргатиш ва унинг туб моҳиятини очиб бериш;
- Муаммоли савол асосида изланиш характеридаги ўқув вазифаларини қўйиш.

Юқоридаги босқичлар асосида ўқув материали тушунтириладиганда ўқувчилар ўзлари дарров тушуниб етмайдиган факт ва тушунчаларга дуч келадилар. Натижада ўрганилаётган мавзу материали билан ўқувчилар орасида муаммоли вазият ҳосил бўлади.

Муаммоли вазиятнинг роли ва аҳамиятини аниқлаш ўқувчиларнинг актив фикрлаш фаолиятини психологик, педагогик қонуниятларини ҳисобга олиш асосида ўқув жараёнини қайта қуриш муаммоли таълимнинг асосий ғоясини белгилаб беради. Муаммоли вазиятларни ҳал қилиш асосида ҳосил қилинган дарс жараёни муаммоли таълим дейилади.

Муаммоли таълимда ўқитувчи фаолияти шундан иборатки, у зарур ҳолларда энг мураккаб тушунчалар мазмунни тушунтира бориб ўрганилаётган мавзу материали билан ўқувчилар орасидаги мунтазам равишда муаммоли вазиятлар вужудга келтирилади, ўқувчиларни фактлардан хабардор қилади, натижада ўқувчилар бу фактларни анализ қилиш асосида мустақил равишда хулоса чиқарадилар ва умумлаштирадилар.

7. Эврестик таълим методи.

Эврестик деган сўзнинг маъноси савол жавобга асосан “топаман” демакдир. Эврестик метод билан ўқитиш мактабларда асосан XIX аср бошларидан бошлаб қўлланила бошлади.

Машғулотлар қизиқарли бўлиши учун, бу машғулотлардаги ҳар бир масала ёки топшириқ сўзма сўз қуруқ ёдлаш учун эмас балки уларнинг олий фаолиятларини ишга соладиган характери бўлиши керак. Америкалик олим Д. Поя эврестик таълим методи тўғрисида шундай деган эди. Эврестикани мақсади янгиликларга олиб борувчи метод ва қоидаларни излаш демакдир. У эврестик метод моҳиятини қуйидагидек изчилликда тўзилган режа орқали амалга оширишни тавсия қилади:

- Масаланинг қуйилишини тушуниш;
- Масаланинг ечиш режаини тўзиш;
- Тузилган режани амалга ошириш;
- Орқага назар ташлаш (ҳосил қилинган ечимни текшириш).

Бу режани амалга ошириш жараёнида ўқитувчилар қуйидаги саволларга жавоб топадилар:

- Масалада нима номаълум?
- Масалада нималар маълум?
- Масаланинг шарти нималардан иборат?
- Илгари шунга ўхшаган масалалар ечилганми?
- Агар шунга ўхшаган масалалар ечилган бўлса, ундан фойдаланиб қўйилаётган масалани еча оладими?

Албатта юқоридаги режа схема ўқувчиларнинг ижодий фикрлаш фаолиятиларни шакллантиради, аммо бу режа-схема ўқувчиларнинг ижодий қобилиятларини шакллантирувчи бирдан бир йўл бўла олмайди.

9.Ақлий ҳужум - умумий муаммо бўйича ўқувчиларни ижодий ишга, ўзаро мулоқотга чорлаш; Босқичлари: муаммоли вазиятни келтириб чиқариш; унинг ечимини топиш учун ўқувчиларни жалб қилиш; турли ечимлар тақдимотини эшитиш; ечимларни солиштириш ва танлаш; хулосалаш;

10.Мустақил ишлаш - вақти -вақти билан ўтказиб туриладиган, ўқувчиларнинг мустақил ўрганиш, дарслик билан ишлаш ва мустақил амалаий фаолият билан шуғулланиш кўникмаларини шакллантирадиган, ҳар бир ўқувчига алоҳида ёки умумий тарзда ташкил қилинадиган топшириқни бажартириш; ўқувчиларнинг амалий фаолиятига аралашмай, ташқаридан тескари алоқа- мулоқот ёрдамида йўналтириб бошқариш ва назорат қилиш.

11.Жуфтликда ишлаш - бирор мавзу бўйича ёнма -ён ўтирган ўқувчиларни ўзаро мулоқотга чорлаш; ўзаро фикр алмашиш ва уларни баъзиларини тинглаш;

12.“Баҳс-мунозара” методи

Метод қуйидаги босқичларда амалга оширилади: ўқитувчи мунозара мавзусини танлайди ва ўқувчиларни мунозарага таклиф этади; ўқитувчи ўқувчиларга муаммо бўйича «ақлий ҳужум» ўтказишга чорлайди ва уни ўтказиш тартибини белгилайди; ўқитувчи «Ақлий ҳужум» вақтида билдирилган турли ғоя ва фикрларни ёзиб боради ёки бу ишни бажариш учун ўқувчилардан бирини котиб этиб тайинлайди ҳамда бу босқичда ўқитувчи ўқувчиларга ўз фикрларини билдиришларига шароит яратиб беради; ўқитувчи ўқувчилар билан биргаликда, иккинчи босқичда «ақлий ҳужум» давомида билдирилган фикр ва ғояларни гуруҳларга ажратади, умумлаштиради ва уларни таҳлил қилади. Таҳлил натижасида қўйилган муаммонинг энг мақбул ечими танланади.

13.Тадқиқот методи

Тадқиқот усули ўзлаштириш даражасининг энг юқори чўқиси ҳисобланади. Бу усул билан дарс ўтилганда ўқувчилар олган билимлари асосида ҳали ўрганилмаган кичик бир масала устида якка ёки биргалашиб изланиш олиб боришади, масала ечимига доир келтирилган тахминни излаб топилган далиллар асосида тўғри ёки нотўғрилигини текширишади ва исботлашади.

Босқичлари:

- дарсда ҳаммага қизиқиш уйғотадиган бирор объектнинг хоссасини аниқлаш ёки у ҳақидаги масалани қўйиш;
- уни ўрганиш, тадқиқ қилиш учун маълумотлар тўплаш;
- муаммо ёки масаланинг ечишга оид тахминлар, башоратлар қилиш;
- ҳар бир башоратнинг қанчалик тўғрилигини тўпланган маълумотлар асосида таҳлил қилиш ва исботлаш;
- хулоса чиқариш;
- синф олдида тақдимот қилиш.

14.Кластер методи

Кластер методи педагогик, дидактик стратегиянинг муайян шакли бўлиб, у таълим олувчиларга ихтиёрий муаммо (мавзу) лар хусусида эркин, очиқ ўйлаш ва фикрларни бемалол баён этиш учун шароит яратишга ёрдам беради. Мазкур метод турли хил ғоялар ўртасидаги алоқалар фикрлаш имкониятини берувчи тузилмани аниқлашни талаб этади. Ушбу метод муайян мавзунинг таълим олувчилар томонидан чуқур ҳамда пухта ўзлаштирилгунига қадар фикрлаш фаолиятининг бир маромда бўлишини таъминлашга ҳизмат қилади.

«Кластер» методидан фойдаланиш тавсифи:

1-босқич. Ниманики ўйлаган бўлсангиз, шуни қоғозга ёзинг. Фикрингизни сифати тўғрисида ўйлаб ўтирмай, уларни шунчаки ёзиб боринг.

2-босқич. Ёзувингизнинг орфографияси ёки бошқа жиҳатларига эътибор берманг.

3-босқич. Белгиланган вақт ниҳоясига етмагунча, ёзишдан тўхтаманг. Агар маълум муддат бирор-бир ғояни ўйлай олмасангиз, у ҳолда қоғозга бирор нарсанинг расмини чиза бошланг. Бу ҳаракатни янги ғоя тўғилгунга қадар давом эттиринг.

4-босқич. Муайян тушунча доирасида имкон қадар кўпроқ янги ғояларни илгари суриш ҳамда мазкур ғоялар ўртасидаги ўзаро алоқадорлик ва боғлиқликни кўрсатишга ҳаракат қилинг. Ғоялар йиғиндисининг сифати ва улар ўртасидаги алоқаларни кўрсатишни чекламанг.

Таълим методларини самарали қўллаш меъзонлари

Методлар	**Қайси вазифаларни ечишда бу метод самаралироқ?**	**Қандай ўқув материали мазмуни учун бу метод қулай?**	**Ўқувчиларнинг қандай хусусиятлари учун бу методни қўллаш фойдали?**	**Бу методни қўллаш учун ўқитувчи қандай ҳислатларга эга бўлиши керак?**
Оғзаки баён методи	Назарий билимларни шакллантириш учун	Ўқув материали асосан назарий ва ахборот кўринишида бўлган ҳолда	Ўқувчилар ўқув материалининг оғзаки баёнини ўзлаштиришга тайёр бўлганда	Ўқитувчи бу методни бошқа методлардан кўра яхшироқ эгаллаган ҳолатда

Кўргазмали метод	Ўқувчиларда кузатувчанлик-ни ривож-лантириш ва ўрганиладиган масалаларга бўлган диққатни ошириш учун	Ўқув материали мазмунини кўзгазмали воситалар билан гавдалантириш мумкин бўлган ҳолатларда	Ўқувчилар учун кўргазмали воситалар етарли бўлганда	Ўқитувчи қўл остида барча кўргазмали воситалар етарли бўлганда ёки уларни ўзи мустақил тайёрлай олганида
Репродук-тив (ўзлашти-рилган билим-ларни қайта баён қилиш)	Билим ва кўникмаларни шакллллантириш учун	Ўқув материали мазмуни ёки ўта мураккаб ёки жуда содда бўлган ҳолда	Ўқувчилар бу мавзуни муаммоли қилиб ўрганишга ҳали тайёр эмас	Ўқитувчининг бу мавзуни муаммоли қилиб ўргатишга вақти йўқ бўлган ҳолда
Тадқиқот-изланиш	Мустақил фикрлаш, тадқиқот олиб бориш ва масалага ижодий ёндашув кўникмаларини ривожлантириш учун	Ўқув материали мазмуни ўртача мураккабликда бўлганда	Ўқувчилар мазкур мавзуни муаммоли тарзда ўрганишга тайёр бўлган ҳолларда	Ўқитувчи изланиш методини яхши эгаллаган ва мавзуни муаммоли ўрганиш учун етарли вақтга эга бўлганда

Амалий	Амалий кўникма ва малакаларни равожлантириш учун	Ўқув материали мазмуни амалий машқлар, тажриба ўтказиш ва турли амалий фаолиятли топшириқларни бажаришни талаб қилса	Ўқувчилар мазкур мавзу бўйича амалий топшириқларни бажаришга тайёр бўлса	Ўқитувчи амалий машғулотларни ўтказиш учун етарлича ўқув ва дидактик материаллар, машқлар тўплами ва ўқув қўлланмаларига эга бўлса
Мустақил ишлаш методлари	Ўқув фаолиятида мустақил ишлаш кўникмаларини шакллантириш ва уларни ривожлантириш учун	Ўқув материали мустақил ўрганиш учун имкониятини берса	Ўқувчилар мазкур мавзу бўйича мустақил ишлашга тайёр бўлса	Ўқитувчи мустақил ишларни ташкил қилиш бўйича етарлича ўқув ва дидактик материаллар эга бўлса
Индуктив	Умумлаштириш ва индуктив хулоса чиқариш кўникмаларини ривожлантириш учун	Ўқув материали дарсликда идуктив тарзда берилгвн ёки уни индуктив тарзда баён қилиш самарали бўлган ҳолда	Ўқувчилар индуктив хулоса чиқаришни яхши билиб, дедуктив хулоса чиқаришга қийналаётган бўлсалар	Ўқитувчи таълимнинг индуктив методларидан яхши хабардор бўлса

Дедуктив	Таҳлил қилиш ва дедуктив хулоса чиқариш кўникмаларини ривожлантириш учун	Ўқув материали дарсликда дедуктив тарзда берилгвн ёки уни дедуктив тарзда баён қилиш самарали бўлган ҳолда	Ўқувчилар дедуктив фикр юритиш ва хулоса чиқаришга тайёр бўзлсалар	Ўқитувчи таълимнинг дедуктив методларидан яхши хабардор бўлса

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1- ТАНЛОВ МАВЗУСИ: МАКТАБ МАТЕМАТИКА КУРСИДА КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ ЎҚИТИШ

1-Мавзу: Мактаб математика курсида комбинаторика элементлари ўқитиш мазмуни

Комбинаторика масалалари ва уларнинг турлари. Ўрин алмаштиришлар, ўринлаштиришлар ва гуруҳлашлар (бирлашмалар). Факториал. Паскаль учбурчаги ва комбинатsiялар. Нъютон биноми формуласи ва комбинатsiялар.

Режа:

1 Комбинаторик масалалар
2. Йиғинди қоидаси.
3. Кўпайтма қоидаси.
4. Такрорланадиган ўринлаштиришлар
5. Такрорланмайдиган ўрин алмаштиришлар
6. Такрорланмайдиган ўринлаштиришлар
7. Такрорланмайдиган гуруҳлашлар

Тингловчиларга комбинаторика масалалари ва комбинаториканинг бўлими ҳақида тушинчалар бериш ва комбинаторик масалаларни ечишда зарур бўлган қойдаларнинг келтириш ва улар ёрдамида комбинаториканинг асосий масалаларидан ўринлаштиришлар ўрин алмаштиришлар, гурухлашларга оид масалаларни ечишни назарий жихатдан асослашдан иборат.

Таянч иборалар: комбинаторика, комбинаторик масалалар, йиғинди қоидаси, кўпайтма қоидаси, тартибланган тўплам ўринлаштиришлар, ўрин алмаштиришлар, гуруҳлашлар, Нютон биноми.

3. Дарснинг жихози. Доска, бўр, электрон доска, кўргазмали қуроллар.

1. Комбинаторика масалалари.

Классик комбинаторик масалалар турли хил қизиқарли бошқотирмалардан иборат бўлиб, бунда чекка тўплам элементларидан танлаб олиш ва уларни хар хил усулда жойлаштриш масалаларни қаралади.

Бундай масалалардан бири қадим Шарқда пайдо бўлган сеҳрли квадрат ҳақидаги қуйидаги масаладан иборат: n^2 дона дастлабки натурал сонлардан шундай
nxn квадрат жадвал ясангки унинг сатрлари, устунлари ва диоганалида жойлашган сонларнинг йиғиндиси бир хил сонга тенг бўлсин. Масалан, 9 та яъни 1дан 9 гача натурал сонлардан 3 х 3 квадрат жадвал тузинки унинг сатрлари, устунлари ва диогналларида турган сонларнинг йиғиндиси 15 га

тенг бўлсин. Бу қуйидаги кўринишдаги квадрат жадвал бўлади:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Ҳозирги кунда бу турдаги масалаларнинг n > 4 ҳол учун эчимларини топиш усуллари топилган.

Сиҳирли квадрат сатрлари (ёки устунлари) сонини унинг тартиби деб аталади.

Ихтиёрий тартибли сиҳирли квадрат сатрлари, устунлари ёки деогналлари бўйича хосил бўлиши керак бўлган йиғиндини унинг доимиси деб аталади. Тартиби н бўлган сеҳирли квадрат доимийси Д қуйдаги формла билан топилади: Д = $(n^3+n)/2$

Масалан, 3 – тартибли сеҳрли квадрат дойимиси

$$Д =(3^2+3)/2=15.$$

Худди шунингдек 4 тартибли сеҳрли квадрат доимийси

$$Д =(4^3+4)/2=34$$

бўлиб бу сеҳрли квадратнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Бунда хар бир сатр, устун ва диагоналларда жойлашган сонларнинг йиғиндиси 34 га тенг.

Умуман элементларнинг турли конбинатsiялари ва уларнинг сонни топиш билан боғлиқ масалалар конбинаторика масалалари дейилади. Бундай масалалар амалиётда кўплаб учрайди. Бунда кўплаб объектлар тўплами элементларидан унинг қисм тўпламларини, қандайдир тўплам элементларини у ёки бу кўринишда жойлаштириш масалалари кўзда тутилади. Масалан, Фермер ўз ишчилари орасида турли ишларни тақсимлаши, зобитнинг визвотдаги аскарлардалардан наряд танлаши, шахматчининг бир қанча юришлар сериясидан энг яхшисини танлаши ва ҳ.к. Бу масалаларда ишларнинг турли хил комбинатсияларини танлаш, аскарларни танлаш, юришни танлаш ҳақида сўз боради.

Комбинаторик масалалар математика фанининг тармоғи – комбинаторикада урганилади. Комбинаторикада чекли тўпламлар, уларнинг қисми тўпламлари, акслантришлар ва чекли тўпламлардан тузилган кортежлар ўрганилади. Шунинг учун комбинаторикани чекли тўпламлар назариясининг қисими деб қараш мумкин.

Кўплаб комбинаторик масалаларни эчиш иккита асосий қоидага яни йиғинди ва кўпайтма қоидаларига асосланади.

Йиғинди қоидаси икки чекли тўплам бирлашмаси элементларининг сонини топишга, кўпайтриш қоидаси эса уларнинг декарт кўпайтмаси элементларининг сонини топишга ёрдам беради.

Бирор А чекли тўплам берилган бўлсин. Унинг элементлари сонини н (А) деб белгилаймиз.

Масалан, А = {а,б,с,д} бўлса, n(А) = 4 бўлади 4.

2. Йиғинди қоидаси. А ва Б чекли тўпламлар берилган бўлсин.

1) Агар $A \cap A = \phi$ бўлса,

n($A \cup B$) = n(А)+n(Б) бўлади.

Масалан, А = {1,2,3}, Б = {а, б, с, д} бўлса n($A \cup B$) = 3+4=7 бўлади.

2) Агар $A \cap B \neq \phi$ бўлса, n($A \cup B$) = n(А)+n(Б) – n($A \cap B$) бўлади.

Масалан, А = {а, б, с, д, э}, Б = {д, э, ф, г} тўпламлар бирлашмаси 7 та элементдан ташкил топган (9 та элементдан эмас). Бунинг сабаби д, э элементлар иккала тўпламда ҳам бор бўлиб $A \cup B$ тўпламда улар бир марта қатнашади. Демак, 9 дан 2 ни айириб ташлаш керак, йъни n($A \cup B$) = n(А)+n(Б) – n($A \cap B$) = 5+4-2=7.

3. Кўпайтириш қоидаси. А = { $a_1,\ a_2,...,a_n$ } ва Б = { $b_1,\ b_2,..,\ b_m$ } тўпламлар берилган бўлсин. Бу тўпламлар элементларидан нечта ($a_i,\ b_j$) жуфтлик тузиш мумкинлигини кўрсатамиз. Барча жуфтликлар қуйидагича жойлаштрилиши мумкин:

$$(a_1;\ b_1),\ (a_{1,}\ b_2)\ ,\dots,(a_1,\ b_m)$$
$$(a_2;\ b_m),(a_2\,,\ b_2)\ ,\dots,(a_2\,,\ b_m)$$
$$(a_n;\ b_1),(a_n;\ b_2)\ ,\dots,(a_n;\ b_m)$$

Бу жадвалда н та сатр ва м та устун бўлиб, улардаги барча жуфтликлар сони нм га тенг. Бу ерда $n(\mathrm{A})=n,\quad n(\mathrm{B})=m$

Кўпайтма қоидаси $n(\mathrm{A}\times\mathrm{B})=n(\mathrm{A})\cdot n(\mathrm{B})$ кўринишда ёзилади. Умуман исботлаш мумкинки

$$n(\mathrm{A}_1\times\mathrm{A}_2\times....\times\mathrm{A}_n)=n(\mathrm{A}_1)\cdot n(\mathrm{A}_2)....n(\mathrm{A}_n).$$

Кўпайтма қоидасига оид комбинаторика масаласининг умумий кўриниши қуидагидан иборат: Агар x елементни м усул, й элементни н усул билан танлаш мумкин бўлса, $(x;y)$ тартибланган жуфтликни $m\cdot n$ усул билан танлаш мумкин.

Масалан, 1дан 9гача сонлардан нечта усул билан турли рақамли икки хонали сон ёзиш мумкинлигини топиш талаб қилинган бўлса, уни қуйидагича амалга ошириш мумкин. 1-рақамни 9 усул билан, 2-рақамни ҳам 9 усул билан танлаш мумкин. Демак, талаб этилган икки хонали сонлар сони

$9 \cdot 9 = 81$та бўлади.

Энди асосий комбинаторик масалалар ва уларни эчиш усуллари биан танишамиз.

4. Такрорланадиган ўринлаштришлар. Масала m элементли X тўплам элементларидан тузилган к узинликдаги кортежлар сонини топинг.

Бу масалани эчиш учун $\underbrace{XxXx....xX}_{k-marta}$ декарт кўпайтмадаги кортежлар сонини топиш керак. Бу декарит кўпайтма к – узунликдаги кортежлардан таркиб топганлигини ҳисобга олсак n(X)=m бўлгани учун кўпайтма қоидасига кўра

$$n(XxXx\cdots xX) = n(X)\cdot n(X)\cdots n(X) = m\cdot m\cdots m = m^k$$

Демак, m элементли X тўплам элементларидан тузилган к узунликдаги кортежлар сони $m^к$ га тенг экан. Комбинаторикда бундай кортежларни m элементдан к тадан такрорланадиган ўринлаштиришлар дейилади ва $\overrightarrow{A_m^k} = m^k$ деб белгиланади Мисол. 4 элементли X={а,б,с,д} тўпламдан нечта узунлиги 2 га тенг кортежлар тўзиш мумкин.

Эчиш. $\overline{A}_4^2 = 4^2 = 16$. Демак, 16 та кортежлар тузиш мумкин. Бу кортежлар қўйидагилардан иборат:

(а;а), (а;б), (а;с), (а;д)

(б;а), (б;б), (б;с), (б;д)

(с;а), (с;б), (с;с), (с;д)

(д;а), (д;б), (д;с), (д;д)

5. Такрорланмайдиган ўрин алмаштиришлар. Масала. м элеминтли X тўпламни неча хил усул билан тартиблаш мумкин?

Масалани ечишдан олдин тартибланган тўплам тушунчасини келтирамиз. m элементли X тўплами берилган бўлсин. Унинг элементларини бирор усул билан номерлаб чиқилган бўлса уни тартибланган тўплам деймиз ва

X = {$x_1, x_2, ..., x_m$}кўринишда ёзамиз. Битта тўпламни турли хил усуллар билан тартиблаш мумкин.

Масалан, аўториядаги талабаларни ёшига, бўйига, оғирлигига, фамилияларининг бош харфига қараб тартиблаш мумкин. Масалани ечиш учун X тўпламининг элементларини тартиблашни (номерлашни) қуйидагича амалга оширамиз:

1 – номерни m та элементнинг исталган бирига бериш мумкин. Шунинг учун 1- элементнин m усул билан, 2 – элементни 1 – элемент танланиб бўлгандан сўнг

m – 1 усул билан танлаш мумкин ва ҳокоза, охирги элементни танлаш учун фақат битта усул қолади, холос. Тартиблашларнинг умумий сони кўпайтма қоидасига кўра м (м – 1) (м - 2)…2.1 га тенг. Уни м! орқали белгиланади ва у дастлабки м та натурал соннинг кўпайтмаси ёки м фасториал деб ўқилади. Уни P_m орқали белгиланади. Демак, м элементли Х тўпламни $P_m = m!$усул билан тартиблаш мумкин экан. P_m - ни m элементдан такрорланмайдиган ўрин алмаштришлар сони деб аталади.

Мисол. 12 та мехмони 12 та стулга неча хил усул билан ўтирғизиш мумкин.

Ечиш. Бу 12 элементдан такрарланмайдиган ўрин алмаштришлар сонини топиш масаласи болиб

P_{12}=12! = $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12$ га тенг.

Демак, 12! Усул билан мехмонларни ўтқазиш мумкин.

6. Такрорланмайдиган ўринлаштиришлар. Масала. м элеминтли Х тўпламдан нечта тартибланган к элементли тўпламлар тузиш мумкин?

Бу олдинги масаладан умумийроқ бўлиб, ундан фарқи шуки, тартиблаш к-элементда тугатилади. Уларнинг умумий сони

m(m-1)(m-2)….(m-к+1)

кўпайтмага тенг. У A_m^k билан белгиланади ва m элементдан к тадан такрорланмайдиган ўринлаштиришлар сони деб аталади:

$$A_m^k = m(m-1)(m-2)....(m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}$$

$A_m^m = P_m = m!,$ о!=1деб қабул қилинади. Мисол. Аудиториядаги 30 талабадан 3та фаол талабани неча хил усул билан танлаш мумкин.

Ечиш. $A_{30}^3 = \frac{30!}{27!} = \frac{1\cdot2\cdots27\cdot28\cdot29\cdot30}{1\cdot2\cdots27} = 28\cdot29\cdot30 = 24360$ усул билан танлаш мумкин.

7.Такрорланмайдиган гуруҳлашлар. Масала. m элементли Х тўпламнинг нечта к элементли қисм тўпламлари бор? m элементли Х тўпламнинг к элементли қисм тўпламлари сони $C_m^k = \frac{A_m^k}{P_m} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$ формула билан ҳисобланади ва у m элементдан к тадан такрорланмайдиган гуруҳлашлар сони дийлади.

Мисол. Гуруҳдаги 30 талабани кўрикда иштирок этиш учун 5 талабани неча хил усул билан танлаш мумкин?

Эчиш. Кўрик иштирокчиларининг тартиби аҳамиятга эга бўлмагани учун 30 элементли тўпламнинг 5 элементли қисм тўпламлар сони нечталигини топамиз:

$$C_{30}^{5}=\frac{30!}{5!25!}=\frac{1\cdot 2\cdots 25\cdot 26\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots 25}=\frac{26\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{13\cdot 9\cdot 7\cdot 29\cdot 6}{1}=144306.$$

Демак, 5 талабани 144306. усул билан танлаш мумкин.

Энди C_m^k кўринишдаги сонларнинг баъзи хоссаларини қараймиз.

$$1^0.C_m^k=C_m^{m-k}.2^0\cdot C_m^k=C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^k,3^0.C_m^0=C_m^m=1$$

2^0 ва 3^0 хоссаларидан фойдаланиб C_m^k кўринишдаги сонларнинг қийматини кетма-кет ҳисоблаш мумкин.

3^0 хоссага кўра $C_0^0=C_1^0=C_1^1=C_2^0=C_2^2=1$ Бундан 2^0 га кўра $C_2^1=C_1^0+C_1^1=1+1=2$. C_m^k куринишдаги сонларни Паскал учбурчаги кўринишида жойлаштириш мумкин:

C^0_0	1
$C^0_1\ C^1_1$	1 1
$C^0_2\ C^1_2\ C^2_2$	1 2 1
$C^0_3\ C^1_3\ C^2_3\ C^3_3$	1 3 3 1
$C^0_4\ C^1_4\ C^2_4\ C_4^3\ C^4_4$	1 4 6 4 1

Бу эрда ҳар бир қатордаги сонлар $(а+б)^м$ кўпҳаднинг ёйилмасидаги биномиал коэффициентларга тенг:

$$(а+б)^0=1$$
$$(а+б)^1=а+б$$
$$(а+б)^2=а^2+2аб+б^2$$
$$(а+б)^3=а^3+3а^2\,б+3аб^2$$
$$(а+б)^4=а^4+4аб^3б+6а^2б^2+4аб^3+б^3$$

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})^{\mathrm{m}}=a^m+C_m^1a^{m-1}b+C_m^2a^{m-2}b^2+C_m^ka^{m-k}b^k+\cdots+b^m$$

Охирги формула Нютон биноми деб йўритилади. Аслида у илгаридан Умар Хайём асарларида мавжуд бўлган.

2-Мавзу: Математика дарсларида комбинаторика элементларини ўқитиш методлари

Комбинаторика масалаларини ечишнинг қўшиш ва кўпайтириш қоидалари. Комбинаторика масалаларини ечишнинг саралаш, жадвал ва “дарахтлар” усуллари. Ўрин алмаштиришлар, ўринлаштиришлар ва гуруҳлашларга доир масалаларни ажратиш алгоритми ва уларни ечишга доир умумий формулалари.

Кўпгина амалий масалаларни ҳал қилишда тўпламларнинг элементлари устида турлича группалаш, амаллар ва ҳоказо ишлар бажаришга тоғри келади. Математиканинг шу доирадаги масалалари билан шуғулланадиган тармоғи комбинаторика деб аталади.

Масалан: 3 та ер участкасининг бирига қовун,бирига тарвуз,бирига бодринг экиш мўлжалланган. Бу полиз экинларини участкаларга неча хил усул билан алмашлаб экиш мумкин. Полиз экинларининг тури а,б,в бўлсин, у ҳолда у экинларни 3 та участкага абв,авб,бав,бва,ваб,вба усулларда экиш мумкин.

Режа:

1. Йиғинди ва кўпайтма қоидаси
2. Ўринлаштиришлар
3. Ўрин алмаштиришлар
4. Гуруҳлашлар
5. Топшириқлар. Комбинаторика элементларига оид назарий машғулотларни пухта ўрганиб қулланмада ва дарсликда берилган мисолларни ечиб келиш.

Комбинаторик масалалар.

1. Йиғинди ва кўпайтма қоидаси.

а) Агар А ва В ўзаро кесишмайдиган тўпламлар бўлиб, А да m элемент, В да n элемент бўлса $A \cup B$ берлашмада m+n элемент бўлади. Агар А ва Б тўпламлар ўзаро кесишса $A \cup B$ бирлашманинг элеминтлари сони m+n дан А ва В лар учун мумумий бўлган элементлер сонини айриб ташлаб топилади.

б) Агар А ва В тўпламлар чекли ва А да n элемент В да m элемент бўлса, бу элементлардан тузилган к узунликдаги кортижлар сони $m \cdot n$ гат энг.

Энди бу қоидаларга хос мисоллар келтирамиз.

Йиғнди қоидаси $(A \cup B)$ =n(А)+n(Б) (1) n($A \cup B$)=n(А)+n(Б)-n($A \cap B$) (2) Формулалар орқали ифодаланишини биламиз.

(1) формула билан ечиладиган комбинаторика масаласи умумий ҳолда қуйдагича ифодаланади: Агар X элементи m усул, Y элементи n усул билан танлаш мумкин бўлса, “X ёки Y” элементини m+n усул билан танлаш

мумкин.

1-мисол. Саватда 10 дона олма ва 20 дона шофтоли бор, бўлса 1 дона мевани неча хил усул билан танлаш мумкин.

Ечиш. 1 дона мевани 10+20=30 усул билан танлаш мумкин

2-мисол. X={1,2,3,4}, Y={а,б,с,д,е} тўпламлар берилган $n(X \bigcup Y)$ =?

Ечиш. m(X)=4. n(Y)=5 бўлган учун n(XxY)=4+5=9.

3-мисол. X={2,4,6,8}, Y={2,5,7,9} тўпламлар берилган. n(XxY)=? Ечиш n(X)=4, n(Y)=4

Лекин 2 сонни хар иккала тўпламда ҳам қатнашади, демак $n(X \bigcap Y)$ =1 (2) формулага кўра $n(X \bigcup Y)$ =4+4-1=7.

4 – мисол. 30 та талабадан 25 таси математикадан якуний назоратдан, 23 таси иқтисод якуний назарийдан ўта олди. 3 та талаба иккала фан бўйича якуний назарийданўта олмади. Нечта қарздор талаба бор.

Ечиш. А билан математика якуний назарийдан ўтмаган талабалар тўпламини, Б билан иқтисод фанидан якуний назарийдан ўтмаган талабалар тўпламини белгилаймиз. У ҳолда n(A) = 30–25=5, n(B)=30-23=7 n($A \bigcap B$)=3, n($A \bigcup B$)=5+7-3=9. Демак, 9 та қарздор талаба бор.

Бизга маълумки кўпайтма қоидаси n(AXB)=n(A)$\cdot n(B)$ (3) кўринишда ёзилади. Кўпайтма қоидасига оид комбинаторика масаласи қуйидагича кўринишда бўлади.

“Агар X элементини m усул, Y элементини n усул билан танлаш мумкин бўлса, (x;y) тартибланган жуфтликни $m \cdot n$ усул билан танлаш мумкин”

5-мисол. А қишлоқдан В қишлоққа 5 та йўл олиб боради, В қишлоқдан С қишлоққа эса 2 та йўл олиб боради. А қишлоқдан С қишлоққа В қишлоқ орқали неча хил усул билан борса бўлади.

Ечиш. А дан С га (1,a)(_1,b), (2,a),(2,b),(3,a),(3,b),(4,a),(4,b),(5,a),(5,b) жуфтликлар орқали берилган йўналишларда бориш мумкин. Бунда йўлнинг биринчи қисми 5 хил усул билан, 2 – қисми 2 ҳил усул билан босиб ўтилади.

X={1,2,3,4,5,}, Y={a,b}. деб олсак,

XxY={(1,a),(2,a),(3,a),(4,a),(5,a),(1;b),(2;b),(3;b),(4;b),(5;b)}-декарт кўпайтма ҳосил бўлади. Бунда b($XxY) = n(X)n(Y) = 5 \cdot 2 = 10$ бўлгани учун А дан С га 10 усул билан боориш мумкинлиги келиб чиқади.

6 - мисол. Нечта турли рақамлар билан ёзилган икки хонали сонлар бор?

Ечиш. Биринчи рақамни 9 усул билан иккинчи рақамни ҳам 9 усул билан танлаш мумкин. Қоидага кўра ҳаммаси бўлиб $9 \cdot 9 = 81$та икки хонали сон бор. Бунда 0 дан бошлаб ўликлар рақамидан бошқа рақамлар назарда тутилади.

3.Такрорланадиган ўринлаштиришлар X={$x_1,x_2,\ldots,x_m$} тўплам берилган бўлсин. Бу тўплам элементларидан узунлиги к га тенг бўлган $m^к$ кортежлар тузиш мумкин: $\vec{A}_m^k = m^k$

Буни м элементдан к тадан такрорланадиган ўринлаштиришлар дейилади.

7 - мисол. 3 элементли X={1,2,3} тўплам элементларидан узунлиги иккига тенг бўлган нечта кортиш тузиш мумкин.

Ечиш. $\vec{A}_3^2 = 3^2 = 9$ та кортиж тузиш мумкин. Мана улар.

(1;1) (1;2), (1;3)
(2;1) (2;2), (2;3)
(3;1) (3;2);(3;3)

8 - мисол. 6 рақамли барча телифон номерлар сонини топинг.

Ечиш. Телифон номерлар 0 дан 9 гача бўлган ўнта рақамдан тузилгани учун 10 элементдан тузилган барча тартибланган узунлиги 6 га тенг бўган кортижлар сонини топамиз: $\vec{A}_{10}^6 = 10^6 = 1000000$

4. Такрорланмайдиган ўрин алмаштиришлар. Малумки м элементли X тўплам элементларини тўрли усуллар билан тартиблашларнинг умумий сони

$П_м = 1\cdot 2\cdots m = m!$ га темг

9 - мисол. 5 та талабани 5 стулга неча хил усул билан ўтқазиш мумкин?

Ечиш. Масала 5 элементдан 5 тадан такрорланмайдиган ўрин алмаштиришлар сонини топишга келтиради. $П_5=5!= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$

Демак, уларни 120 хил усул билан ўтирғизиш мумкин

5. Такрорланмайдиган ўринлаштиришлар. м элементли X тўпламдан тузиладиган барча тартибланган n элементли тўпламлар сони

$$A_m^n = m(-1)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} \text{ га тенг.}$$

10 - мисол. Гуруҳдаги 25 талабадан танловга қатнашиш учун 2 талабани неча хил усул билан танлаш мумкин.

Ечиш. $A_{25}^2 = \frac{25!}{23!} = \frac{1\cdot 2\cdots 25\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdots 23} = 24\cdot 25 = 600$ усул билан танлаш мумкин.

11- мисол. 8 кишидан сардор, ошпаз, чойхоначи ва навбачилардан иборат. 4 кишини танлаш керак. Буни неча хил усулда амалга ошириш мумкин?

Ечиш. Бу масала 8 кешидан 4 тадан такрорланмайдиган ўринлаштиришлар сонини топишга келтирилади. Демак, $A_8^4 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1680$ усул билан 4 кишини танлаш мумкин.

6. Такрорланмайдиган гуруҳлашлар. m элементли X тўпламнинг к элементли қисм тўпламлари сони

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_m} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

формула бўйича топилади.

12 - мисол. Курсдаги 20 талабадан кўрикда иштирок этиш учун 5 талабани неча хил усулда танлаҳ мумкин.

Ечиш. Кўрик иштирикчиларнинг тартибга аҳамиятга эга бўлмагани учун 20 элементли тўпламнинг 5 элементли қисм тўпламлари сони нечталигини топамиз:

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{15!5!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 15\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 2\cdot 17\cdot 6\cdot 19\cdot 4 = 10704$$

Демак, 5 талабани 10704 усул билан танлаш мумкин экан.

13 - мисол. 6 та ҳар хил рангли қаламдан 4 хил рангли қаламни неча хил усул билан танлаш мумкин.

Ечиш. $C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5\cdot 3 = 15$ хил усул билан танлаш мумкин.

Энди чикли X тўплам қисм тўпламлари сонини топиш ҳақидаги масалани қараймиз. Уни ҳал қилиш учун исталган тарзда X тўпламни тартиблаймиз. Сунг ҳар бир қисм тўпламни m узунлигидаги кортеж сифатида шифрлаймиз: қисм тўпламга кирган элемент ўрнига 1, кирмаган элемент ўрнига 0 ёзамиз. Масалан, агар $X=\{x_1;x_2;x_3;x_4;x_5\}$ болса, у ҳолда (0;1;1;0;1) кортеж $\{x_2,x_3,x_5\}$ қисм тўпламини шифрлайди, (0;0;0;0;0) кортеж эса бўш тўплам, (1;1;1;1;1) кортеж эса X тўпламнинг ўзини шифрлайди. Шунда қисим тўпламлар сони иккта {0;1} элементдан тузилган барча m узунликдаги кортежлар сонига тенг бўлади: $\overline{A}_2^m = 2^m$.

14-мисол. X={a;б;c;} тўпламнинг барча қисм тўпламларини ёзинг, улар нечта бўлади.

Ечиш. ϕ, {a}, {b}, {c}, {a;b}, {a;c}, {b;c}, {a;b;c} лар X тўпламнинг барча қисм тўпламлари бўлиб уларнинг сони 2^3=8га тенг.

2-ТАНЛОВ МАВЗУСИ: МАТЕМАТИКА ДАРСЛАРИДА ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ВА ТЕКИСЛИКЛАРНИ ЎҚИТИШ МЕТОДИКАСИ

1-Мавзу: Фазода тўғри чизиқлар ва текисликларни ўқитиш мазмуни

Фазода тўғри чизиқлар ва текисликлар; кўпёқлар ва уларнинг содда кесимларини ясаш; амалий машқ ва татбиқ.

Фазодаги тўғри чизиқ ва текисликларнинг ўзаро вазитатлари

Фазода тўғри чизиқ ва текисликларнинг жойлашишини ўрганиш. Фазода тўғри чизиқ ва текисликларнинг ўзаро жойлашиши ҳақидаги тушунчалар ўрганилаётганида асосан уларнинг қуйидаги ҳолатлари қаралади: тўғри чизиқ ва текисликнинг параллеллиги ва перпендикулярликлиги, текисликларнинг ўзаро параллеллиги ва перпендикулярлиги.

Бу тушунчаларни ўрганиш жараёнида талабалар фазода тўғри чизиқ ва текисликнинг ўзаро жойлашиш вазиятларини таҳлил қилиб, уларда фазовий тасаввурларнинг ривожланиш имкониятлари вужудга келади.

Мазкур мавзуни ўрганишда қуйидаги жиҳатларга алоҳида этибор бериш лозим: биринчидан, параллеллик ва перпендикулярлик аломатларининг қатъий исботланиши, иккинчидан, кўргазмалилик асосида асослашга эътибор бериш; учинчидан, қўллашга доир фазовий масалаларни ййечиш.

Бундан ташқари, бу мавзунинг фазовий жисмларнинг кесимларини ҳосил қилишда, тасвирлашдаги аҳамиятини эътиборга олиб зарур машқлар системасидан фойдаланиш талаб этилади.

Тўғри чизиқларнинг фазодаги вазияти билан текисликдаги вазияти орасидаги фарқ ва ўхшашликларни очиб бериш ҳам талабаларнинг мазкур тушунчаларини яхши эгаллашларига имкон беради.

Фазода тўғри чизиқ ва текисликларнинг перпендикулярлиги

Бу мавзу уч қисмга бўлиб ўрганилади:

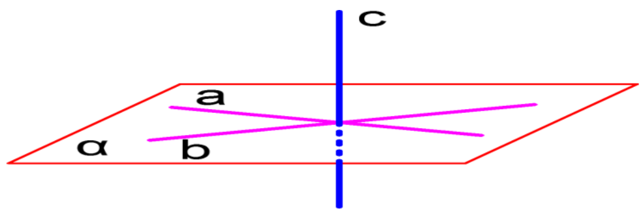
1. Фазода тўғри чизиқлар перпендикулярлиги.
2. Тўғри чизиқ ва текисликлар перпендикулярлиги.
3. Текисликлар перпендикулярлиги.

I қисмни ўрганишда такрорлаш амалга оширилади, бунда аввало:

1) ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқларнинг таърифи ўрганилади;

2) кесишувчи ва айқаш ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқлар хоссалари ўрганиладли;

3) кўпёқлар моделларида ва атрофдаги предметлардан уларни кўрсатиш орқали амалга оширилади.



II қисмни ўрганишда қуйидаги савол муҳокама қилинади: қандай пайтда тўғри чизиқ текисликни кесиб ўтиб, унга перпендикуляр бўлади.

Тажрибадан кўринадики, агар тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлса, у бу текисликдаги ҳар қандай тўғри чизиққа перпендикуляр. Бу моделда кўрсатилади. Сўнгра тўғри чизиқ ва текислик перпендикулярлиги таърифи баён қилинади. Мактабда тўғри чизиқ ва текисликларнинг перпендикулярлиги таърифига уларнинг кесиши талабини қўшиш лозим, буни қўшмасак уни исботлашга тўғри келади.

Агар талабалар тайёр бўлса янги таъриф ҳам бериш мумкин: агарда текисликни кесиб ўтувчи тўғри чизиқ текисликда ётувчи ҳар бир тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, тўғри чизиқ бу текисликка перпендикуляр дейилади.

Тўғри чизиқ ва текисликларнинг перпендикулярлик аломатини ўргатишда икки параллел тўғри чизиқ текисликка параллел бўлса, улар текисликка перпендикуляр бўлмаслигини кўрсатиш зарур.

Бу аломатнинг исботи учбурчаклар тенглигидан келтириб чиқарилади, бу векторлар скаляр кўпайтмасини ўрганишда керак бўлади.

Бу мавзуни ўрганишда оғма тушунчаси ҳам киритилади.

Текисликлар перпендикулярлигини ўрганишда текисликларнинг ўзаро жойлашиши қараб чиқилади, чизмалар, модделлар ва талабаларнинг тасаввурлари асосида иккита перпендикуляр текисликлар кесувчи эканлиги келтириб чиқарилади.

Текисликлар орасидаги бурчак нима деган савол туғилади. Бунда икки текислик учининг текислик кесиб ўтганда ҳосил бўлган кесишиш чизиғига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак қаралади.

Текисликлар перпендикулярлигини ўрганишда кўпёқларнинг моделлари, предметлар, стереометрик қонуниятлардан фойдаланиш лозим.

Бу мавзуни ўрганишда:

1) перпендикуляр текисликнинг таърифи;

2) перпендикуляр текислик ясаш.

3. Масалалар ечишнинг босқичлари орқали ўрганилаётган тушунча мустаҳкамланади ва умумлаштирилади.

Стереометрия, яъни фазодаги геометрияни ўрганишни биз унинг аксиомаларидан бошлаймиз:

C_1 Текислик қандай бўлишидан қатъий назар, унга тегишли ва унга тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд.

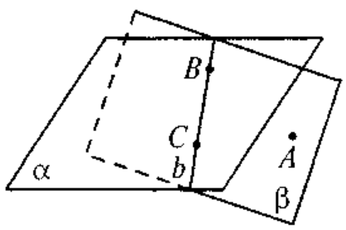
C_2 Агар иккита бар хил текислик умумий нуқтага эга бўлса, бу текисликлар шу нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ бўйлаб ўзаро кесишади.

C_3 Битта тўғри чизиқда ётмаган ихтиёрий учта нуқтадан текислик ўтказиш мумкин ва у ягонадир.

Юқорида келтирилган аксиомалар ёрдамида баъзи теоремаларни исботлаймиз.

Теорема. ***Агар тўғри чизиқнинг иккита нуқтаси текисликка тегишли бўлса, тўғри чизиқ шу текисликда ётади.***

И с б о т и. Тўғри чизиқнинг *Б* ва *C* нуқталари α текисликда ётсин. У ҳолда C_1 аксиомага кўра α текисликда ётмайдиган *A* нуқта топилади. Битта тўғри чизиқда ётмаган *A, B, C* нуқталардан,C_3 аксиомага кўра, ягона β текислик ўтказиш мумкин. Модомики, $A \bar{\in} \alpha$ экан, α ва β ҳар хил текисликлардир. Лекин α ва β текисликлар умумий *C* нуқтага эга, шу сабабли C_2 аксиомага кўра, улар *C* нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ бўйича кесишади. Иккинчи томондан, α ва β текисликлар умумий B нуқтага эга, шу сабабли улар B нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ бўйлаб кесишади. Шундай қилиб, α ва β текисликлар B ва C нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ бўйлаб кесишади, лекин B ва C нуқталар b тўғри чизиқда ётади. Модомики, иккита бар хил B ва *C* нуқтадан ягона тўғри чизиқ ўтказиш мумкин экан, α ва β текисликлар B ва *C* нуқталар ётган *b* тўғри чизиқ бўйлаб кесишади. Демак, BC тўғри чизиқнинг



барча нуқталари α текисликка тегишли бўлади.

Агар берилган α ва β текисликлар иккита, мос равишда, B ва C нуқталардан ўтувчи ҳар хил тўғри чизиқлар бўйлаб кесишади, деб фараз қилсак, α ва β текисликлар устма-уст тушиши лозим, бу эса ясалишига кўра мумкин эмас. Теорема исботланди.

Т е о р е м а . ***Берилган тўғри чизиқ ва унда ётмаган нуқта орқали ягона***

текислик ўтказиш мумкин.

И с б о т и. *а* — берилган тўғри чизиқ ва *С* унда ётмаган берилган нуқта бўлсин. Берилган *а* тўғри чизиқда (планиметрия аксиомасига кўра), ҳеч бўлмаганда, иккита, А ва В нуқта топилади. *А, В ва* Снуқталар битта тўғри чизиқда ётмайди. C_1 аксиомага кўра, битта тўғри чизиқда ётмаган учта *А, В ва С* нуқтадан ягона текислик ўтказиш мумкин. 1 - теоремага мувофиқ берилган *α* тўғри чизиқ шу текисликда ётади. Теорема исботланди.

Теорема. ***Берилган кесишувчи иккита тўғри чизиқ орқали ягона текислик ўтказиш мумкин.***

И с б о т и. Берилган *а ва b* тўғри чизиқлар С нуқтада кесишсин, яъни $a \cap b = C$ va $C \in a,\ C \in b$бўлсин. Планиметрия аксиомаларига кўра, *α* тўғри чизиқда, ҳеч бўлмаганда, яна битта *А* нуқта ва b тўғри чизиқда эса В нуқта топилади. Бу *А,В, С* нуқталарҳар хил ва битта тўғри чизиқда ётмайди. C_3 аксиомага кўра, *А,В, С* нуқталар орқали ягона α текислик ўтказиш мумкин. 1-теоремага кўра *α* ва b тўғри чизиқлар α текисликда ётади. Теорема исботланди.

Фазодаги параллел тўғри чизиқлар

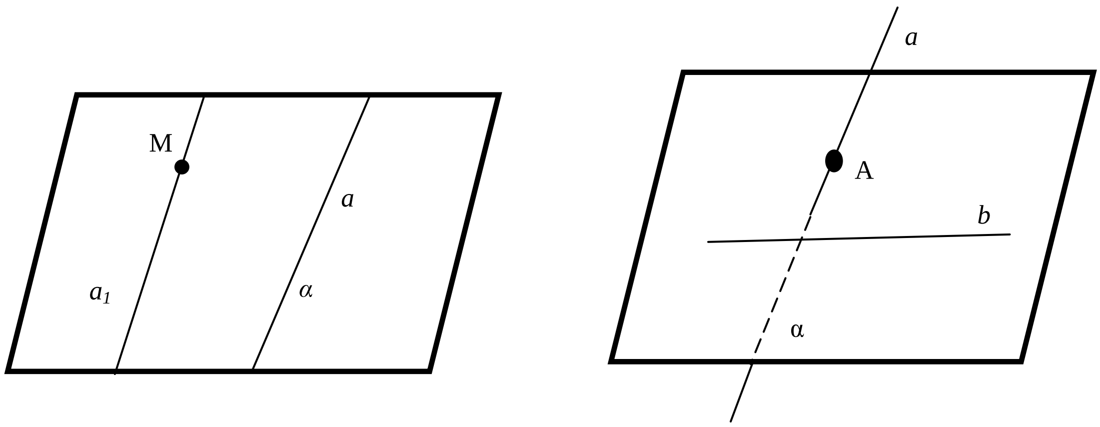
Т а ъ р и ф. *Фазодаги иккита а ва b тўғри чизиқ бир текисликда ётса ва кесишмаса,* ***улар параллел тўғри чизиқлар*** *дейилади.*

а ва b тўғри чизиқларнинг параллеллиги $a \parallel b$каби ёзилади. Текисликда бўлгани каби, фазода қуйидаги теорема о'ринли.

Теорема. ***Фазонинг берилган тўғри чизиқда ётмаган нуқтасидан шу тўғри чизиққа параллел ягона тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.***

И с б о т и. *а* — берилган тўғри чизиқ ва *М*— бу тўғри чизиқда ётмаган нуқта бўлсин. *а* тўғри чизиқ ва *М* нуқта орқали α текислик ўтказамиз. Сўнгра α текисликда *М* нуқта орқали *а* тўғри чизиққа параллел a_1 тўғри чизиқ ўтказамиз. Улар учун текисликдаги барча хулосалар ўринли. Жумладан, берилган *М* нуқта орқали берилган тўғри чизиққа параллел ягона тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Ҳақиқатан, агар берилган *М* нуқта орқали ва *а* тўғри чизиққа параллел равишда ўтказилган бошқа a_2 тўғри чизиқ мавжуд деб фараз қилсак, a ва a_2 тўғри чизиқлар орқали (ХИИИ боб) α_1 текислик ўтказиш мумкин. Иккинчи томондан,α_1текислик a тўғри чизиқ ва M нуқта орқали ўтади, демак, аввалги бобда исботланганига кўра, у α текислик билан устма-уст тушади. Бундан, параллел тўғри чизиқлар аксиомаси бўйича a_1 ва a_2тўғри чизиқларнинг устма-уст тушиши келиб чиқади. Теорема исботланди.

Бизга α текислик ҳамда иккита a ва b тўғри чизиқлар берилган бўлсин. a тўғри чизиқ α текислик билан A нуқтада кесишсин, b тўғри чизиқ эса α текисликда ётсин, лекин у A нуқта орқали ўтмасин . α ва b тўғри чизиқлар орқали текислик ўтказиш мумкин эмас, чунки, акс ҳолда, b тўғри чизиқ ва A нуқта орқали



иккита ҳар хил текисликлар ўтказиш мумкин бўлади: улардан бири — a тўғри чизиқни кесиб ўтувчи α текислик бўлса, иккинчиси эса a тўғри чизиқ унда ётадиган текисликдир. Бундай бўлиши мумкин эмас. Шундай қилиб, фазодаги тўғри чизиқлар уч хил бўлиши мумкин:

1. Кесишувчи тўғри чизиқлар.
2. Параллел тўғри чизиқлар.
3. Параллел бўлмаган ва кесишмайдиган тўғри чизиқлар.

2-таъриф. *Фазодаги ўзаро параллел бўлмаган ва кесишмайдиган тўғри чизиқлар* ***айқаш тўғри чизиқлар*** *дейилади.*

Теорема (тўғри чизиқларнинг параллеллик аломати). ***Учинчи тўғри чизиққа параллел иккита тўғри чизиқ ўзаро параллелдир.***

И с б о т и. Фараз қилайлик,$a \parallel b$ва $b \parallel c$бўлсин.$a \parallel c$бўлишини исботлаймиз. a ва c тўғри чизиқлар ўзаро кесишмайди, чунки, акс ҳолда, a ва c тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси орқали битта b тўғри чизиқнинг ўзига параллел иккита ҳар хил *a* ва *c* тўғри чизиқ ўтиши керак эди, лекин бундай бўлиши мумкин эмас.

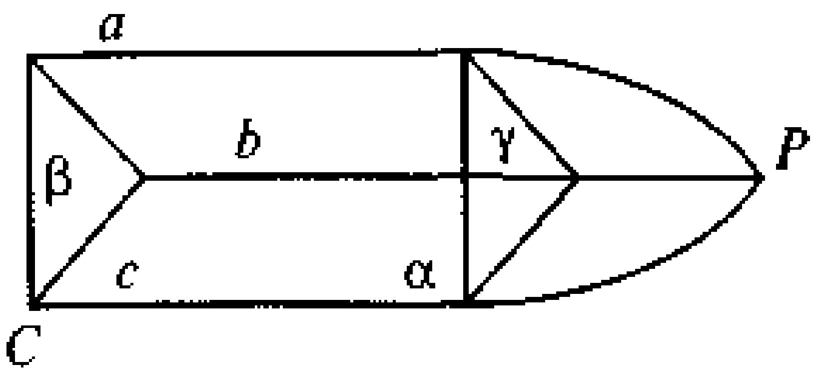
a ва c тўғри чизиқлар айқаш бўлсин, деб фараз қилайлик. Параллел *α ва b* тўғри чизиқлар орқали γ текислик, параллел b ва c тўғри чизиқлар орқали эса α текислик ўтказамиз.

α тўғри чизиқ ва *c* тўғри чизиқнинг бирор *C* нуқтаси орқали β текислик ўтказамиз. α ва β текисликларнинг кесишиш чизиғи *m* тўғри чизиқ бўлсин. У ҳолда b, *c*,*m* тўғри чизиқлар битта α текисликда ётади, бунда $c \parallel b$ бўлади. Шу сабабли *c* тўғри чизиқ билан кесишувчи *m* тўғри чизиқ, унга параллел *b* тўғри чизиқни бирор P нуқтада кесиб ўтиши лозим. *m* ва b тўғри чизиқлар, мос равишда, β ва γ текисликларда ётади. Шу сабабли улар учун умумий *P* нуқта уларнинг кесишиш чизиғи бўлган *α* тўғри чизиқда ётади. Лекин бунда *α* ва *b* тўғри чизиқлар, теореманинг шартига зид равишда, умумий P нуқтага эга бўлади.

Демак, *α* ва *c* тўғри чизиқлар кесишувчи ҳам, айқаш ҳам бўлиши мумкин эмас, улар фақат параллел бўлади, яъни $a \parallel c$.Теорема исботланди.

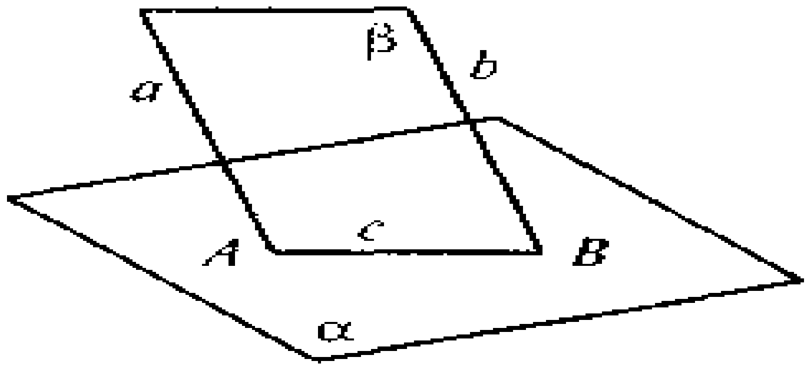
Битта тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётувчи иккита ва ундан кўп кесмалар ў*заро параллел* дейилади.

М а с а л а. Агар икки параллел тўғри чизиқнинг бири текисликни кесиб ўтса, иккинчиси ҳам шу текисликни кесиб ўтади.



Ечилиши. $a \parallel b$ бўлиб, *a* тўғри чизиқ α текисликни *A* нуқтада кесиб ўтсин.

Иккита параллел *а* ва b тўғри чизиқ орқали ягона β текислик ўтказиш мумкин. α ва β текисликлар умумий А нуқтага эга, шу сабабли улар, C_2 аксиомага биноан, *c* тўғри чизиқ бўйича кесишади. β текисликда *c* тўғри



чизиқ параллел тўғри чизиқлардан бирини *а* тўғри чизиқни *А* нўқтада кесиб ўтади. Демак, *c* тўғри чизиқ b тўғри чизиқни ҳам В нуқтада кесиб ўтади. *АВ* тўғри чизиқнинг *А* ва В нуқталари α текисликда ётган экан, *АВ* тўғри чизиқнинг ўзи ҳам α текисликда ётади.

Шунингдек, В нуқта b тўғри чизиққа тегишли бўлганлигидан, b тўғри чизиқ, ҳақиқатан ҳам, α текисликни В нуқтада кесиб ўтади.

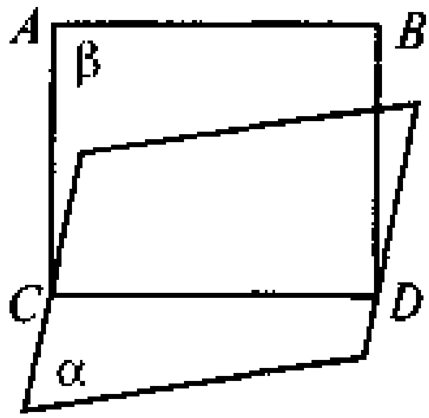
Параллел тўғри чизиқ ва текислик

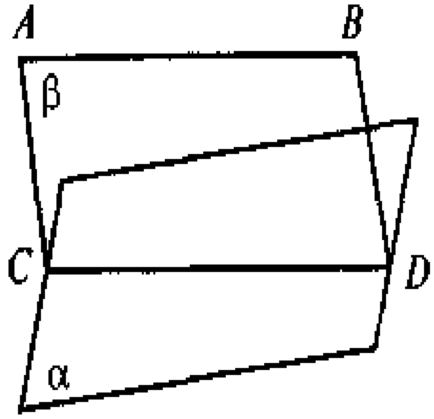
Т а ъ р иф. *Агар а тўғри чизиқ ва а текислик кесишмаса, улар параллел дейилади.*

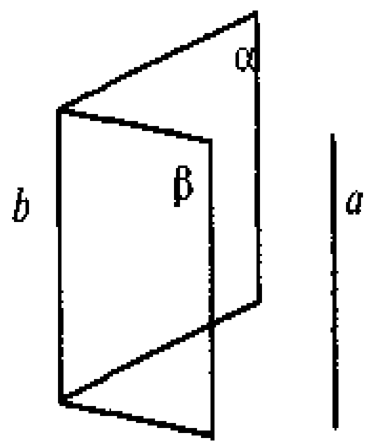
а тўғри чизиқ ва α текисликнинг параллеллиги $a \parallel \alpha$ каби белгиланади. 3-Теорема (тўғри чизиқ ва текисликнинг паралеллик аломати). ***Агар тўғри чизиқ текисликда ётган бирор тўғри чизиққа параллел бўлса, у текисликнинг ўзига ҳам параллел бўлади.***

И с б о т и. Теореманинг шартга кўра $AB \parallel CD,\ CD \subset \alpha$. Шу сабабли *АВ* ва *CD* тўғри чизиқлар орқали β текислик ўтказиш мумкин. У ҳолда $\alpha \cap \beta = CD$ бўлади ҳамда α ва β текисликларнинг барча умумий нуқталари *CD* тўғри чизиқда ётади. *АВ* тўғри чизиқ α текислик билан қандайдир Р нуқтада кесишади, деб фараз қилайлик. *АВ* тўғри чизиқ β текисликда ётганлигидан, Р нуқта β текисликка тегишли бўлади. Иккинчи томондан, Р нуқта α текисликка тегишли. Р нуқта α ва β текисликларга тегишли бўлганлигидан, у текисликларнинг кесишиш чизиғи — *CD* тўғри чизиққа тегишли бўлиши керак. Шундай қилиб, *АВ ва* CD тўғри чизиқлар Р умумий нуқтага эга, яъни улар кесишади. Бу эса теореманинг шартига зид. Бундан фаразимизнинг нотўғри эканлиги келиб чиқади. Демак, *АВ* тўғри чизиқ α текислик билан кесишмайди, яъни улар параллел бўлади.

Теорема . ***Агар* β *текислик бошқа* α *текисликка параллел АВ тўғри чизиқ орқали ўтиб, шу* α *текисликни кесиб ўтса, кесишиш чизиғи берилган АВ тўғри чизиққа параллел бўлади.***







И с б о т и. *АВ* ва *CD* тўғри чизиқлар битта β текисликда ётган экан, параллел тўғри чизиқлар учун биринчи шарт бажарилади. *АВ* ва *СВ* тўғри чизиқлар кесишмайди, чунки, акс ҳолда, *AB* тўғри чизиқ *CD* билан кесишгач, у α текислик билан кесишиши лозим. Шартга кўра эса AB тўғри чизиқ ва α текислик кесишмайди. Демак, фаразимиз нотўғри, шундай қилиб, $AB \parallel CD$. Теорема исботланди.

Натижа. *Агар а тўғри чизиқ кесишувчи* α *ва* β *текисликларнинг ҳар бирига параллел бўлса, у текисликларнинг кесишиш чизиғи* b *га ҳам параллел бўлади, яъни* $a \parallel \alpha,\ b \parallel \beta,\ \alpha \cap \beta = b$ *муносабатлардан* $a \parallel b$ *бўлиши келиб чиқади.*

Тўғри чизиқ ва текисликнинг ўзаро перпендикулярлиги

Таъриф. *Агар фазода берилган икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак* 90° *га тенг бўлса, улар* ***ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқлар*** *дейилади.*

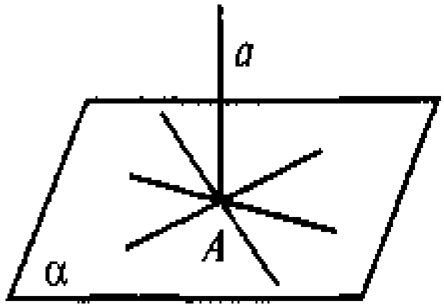
a ва b тўғри чизиқларнинг перпендикулярлиги $a \perp b$ кўринишда ёзилади. Та'рифдан перпендикулар тўғри чизиқларнинг ўзаро кесишувчан, шунингдек, айқаш бўлиши ҳам келиб чиқади.

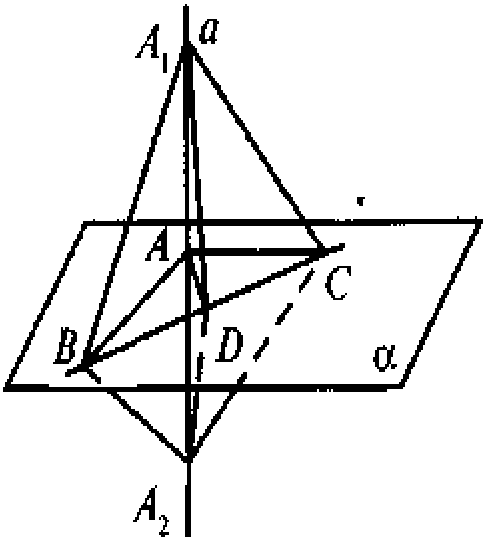
Таъриф. *Агар а тўғри чизиқ, а. текисликдаги, у билан кесишиш нуқтаси А орқали ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, а тўғри чизиқ* ***а. текисликка перпендикуляр*** *дейилади*.

Теорема (тўғри чизиқ ва текисликнинг перпендикулярлик аломати). ***Агар а тўғри чизиқ, унинг а текислик билан кесишиш нуқтаси орқали ўтувчи иккита тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, а тўғри чизиқ*** **α** ***текисликнинг ўзига ҳам перпендикуляр бўлади.***

И с б о т и. *а* тўғри чизиқнинг α текислик билан кесишиш нуқтаси *А* орқали *а* тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган иккита *AB* ва *AC* тўғри чизиқлар ўтказилган бўлсин. *а* тўғри чизиқ α текисликдаги *А* нуқта орқали ўтувчи яна битта *AD* тўғри чизиққа перпендикуляр бўлишини исботлаш лозим бўлади.

α текисликда *AB ва AC* тўғри чизиқларни, масалан, D ва *C* нуқталарда кесиб ўтувчи BC тўғри чизиқ ўтказамиз, у *AD* тўғри чизиқ билан D нуқтада кесишади. *α* тўғри чизиқдаги *А* нуқтанинг ҳар хил томонларида ўзаро тенг $AA_1 = AA_2$ кесмаларни жойлаштирамиз. Сўнгра A_1 va A_2 нуқталарни B, *C ва D* нуқталар билан туташтирамиз. Натижада,





иккита тенг ёнли A_1A_2B va A_1A_2C учбурчакларни ҳосил қиламиз:

тенг проекцияларга эга оғмалар сифатида, $A_1B = A_2B$ ва $A_1C = A_2C$ У ҳолда томонлари тенг учбурчаклар сифатида, $\Delta A_1BC = \Delta A_2BC$ бўлади. Бундан, $\angle A_1CB = \angle A_2CB$ бўлиши келиб чиқади. Энди ΔA_1CD va ΔA_2CD ларни таққослаймиз. Уларда *CD* — умумий томон, $A_1C = A_2C$ ҳамда $\angle A_1CD = \angle A_2CD$, шунинг учун улар икки томони ва улар орасидаги бурчаги бўйича ўзаро тенг. Бундан $A_1D = A_2D$ бўлишини оламиз. Учта томонлари бўйича $\Delta A_1AD = \Delta A_2AD$ бўлади. Бундан $\angle A_1AD = \angle A_2AD$ бўлиши келиб чиқади. Бу бурчаклар — қўшни бурчаклар бўлганлигидан, уларнинг ҳар бири 90° га тенг, яъни $A_1A_2 \perp AD$. Теорема исботланди.

Т а' р и ф. *Текисликни кесиб ўтиб, унга перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқ, бу текисликка* ***огма*** *дейилади.*

Берилган *A* нуқтадан α текисликка *AB* перпендикуляр *ва AC* оғма ўтказилган бўлсин. Перпендикуляр ва оғмалар текисликни кесиб ўтадиган В *ва C* нуқталарни туташтириб, α текисликка *AC* оғманинг проекцияси деб аталадиган *BC* кесмани ҳосил қиламиз ва қуйидагича ёзамиз:

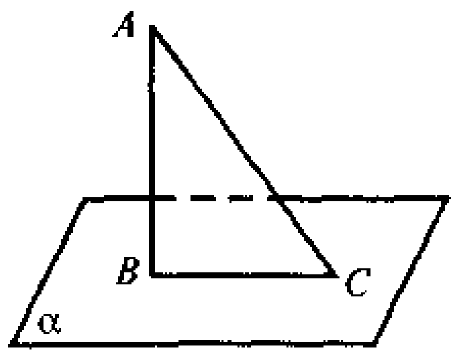
$$\mathrm{pr}_\alpha AC = BC. \qquad (1)$$

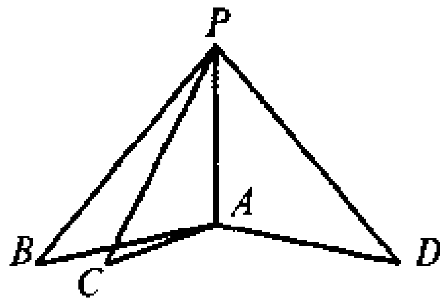
Теорема. ***Агар α текисликдан ташқарида ётувчи P нуқтадан бу текисликка PA перпендикуляр ва PB, PC,... огмалар ўтказилган бўлса:***

1) ***проекциялари тенг оғмалар тенг бўлади;***

2) ***иккита оғмадан қайси бирининг проекцияси катта бўлса, ўша оғма катта бўлади.***

И с б о т и. Агар барча учбурчаклар текисликларини ΔPAB текислигининг устига ётқизсак, фазодаги теорема планиметриядаги теоремага келтирилади. У ҳолда барча оғмаларнинг проекциялари битта *AD* тўғри чизиқда ётади. Планиметрияда исботланган теорема бўйича $AD > AB > AC$ дан $PD > PB > PC$ бўлиши келиб чиқади.

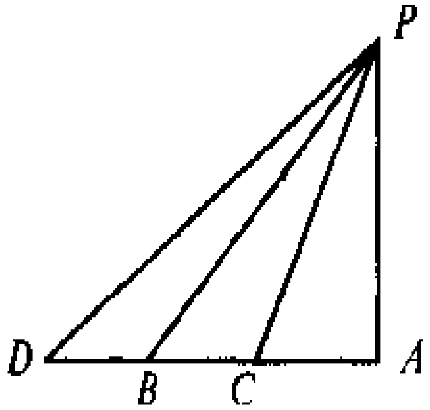


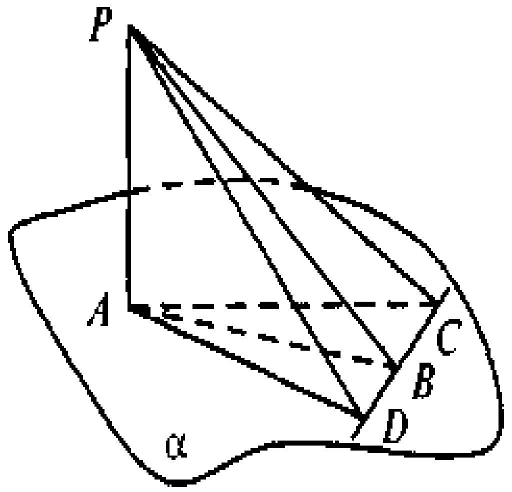


Теорема (уч перпендикуляр ҳақида). ***Текисликда оғманинг асоси орқали унинг проекциясига перпендикуляр равишда ўтказилган тўғри чизиқ оғманинг ўзига ҳам перпендикуляр бўлади.***

И с б о т и. Берилган α текисликка Р*A* перпендикулар ва РВ оғма ўтказилган бўлсин. *A* ва В нуқталарни туташтириб, РВ оғманинг α текисликка *AB* проекциясини оламиз. В нуқтадан α текисликка *AB* га перпендикулар *CD* тўғри чизиқ ўтказамиз ва $CD \perp PB$ бўлишини исботлаймиз.

CD тўғри чизиқда ихтиёрий, ўзаро тенг В*C* = *BD* кесмаларни жойлаштирамиз. У ҳолда, ўзаро тенг *AC* - *AD* пройексияларга эга бўлган фазодаги ог'малар сифатида, Р*C* = *PD* бўлади. Энди ΔPCD тенг ёнли учбурчак бўлади ва шунинг учун унинг РВ медианаси баландлик ҳам бўлади, яъни $PB \perp CD$. Теорема исботланди.





Юқоридаги чизмадан фойдаланиб, исботланган тасдиққа тескари теоремани ҳам исботлаш мумкин.

Теорема (тескари теорема). ***Текисликда PB оғманинг асоси орқали оғмага перпендикуляр равишда ўтказилган CD тўғри чизиқ оғманинг AB проекциясига ҳам перпендикуляр бўлади.***

Исботини мустақил равишда амалга ошириш тавсия қилинади.

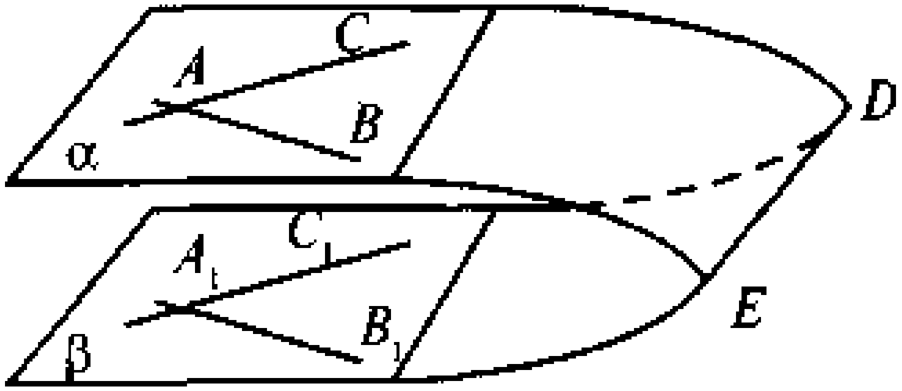
Фазода текисликларнинг ўзаро вазитатлари

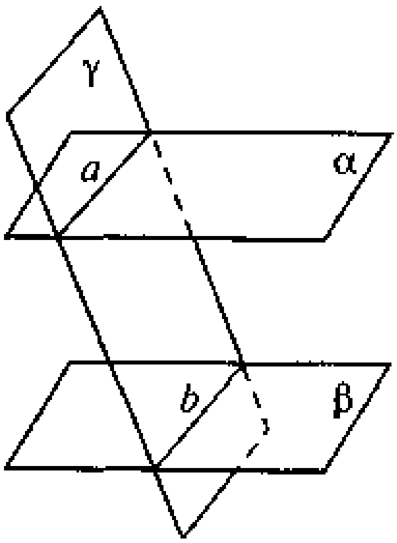
Таъриф. *Агар иккита текислик кесишмаса,* ***улар параллел текисликлар*** *дейилади.*

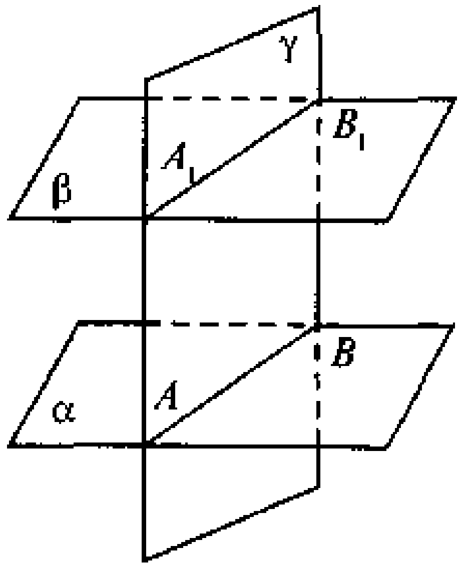
Теорема (икки текисликнинг параллеллик аломати). ***Агар α текисликдаги иккита кесишувчи AB ва AC тўғри чизиқлар β текисликдаги иккита кесишувчи A_1B_1 ва A_1C_1 тўғри чизиқларга, мос равишда, параллел бўлса, текисликлар ҳам ўзаро параллел бўлади*** .

И с б о т и. $AC \parallel A_1C_1, A_1C_1 \subset \beta$ бўлганлигидан ,$AC \parallel \beta$ бўлади.

Шунга ўхшаш, $AB \parallel \beta$, $A_1C_1 \parallel \alpha$, $A_1B_1 \parallel \alpha$ бўлади. Исботнинг тескарисини фараз қилиш йўли билан ўтказамиз. α ва β текисликлар DE тўғри чизиқ бўйлаб кесишсин, деб фараз қиламиз. У ҳолда юқорида исботланган теоремага мувофиқ, текисликлар кесишган DE тўғри чизиқ бир вақтнинг ўзида битта A нуқта орқали ўтувчи иккита АВ ва АС тўғри чизиққа параллел бўлади. Бундай бо лиши мумкин эмас ва демак, фаразимиз нотўғри. Бундан $\alpha \parallel \beta$ екани келиб чиқади. Теорема исботланди.





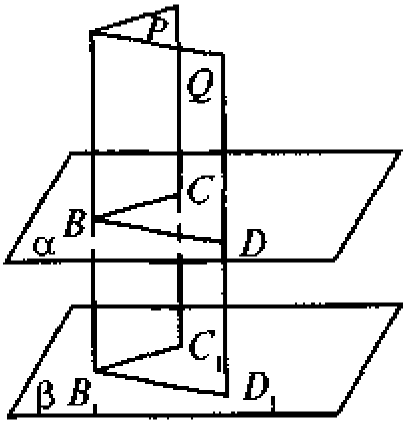


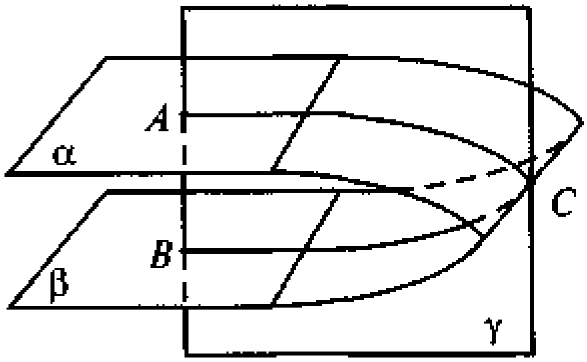
Энди параллел текисликларнинг хоссаларини қараймиз.

Теорема. ***Агар иккита параллел α ва β текислик учинчи γ текислик билан кесишса, уларнинг кесишиш чизиқлари параллел бўлади***.

Теорема. ***Параллел тўғри чизиқларнингпараллел текисликлар орасида жойлашган кесмалари тенг бўлади.***

Теорема. ***Агар тўғри чизиқ параллел α ва β текисликларнинг бирига перпендикулар бўлса, уларнинг иккинчисига ҳам перпендикуляр бўлади.***





Теорема (тескари теорема). ***Агар икки текислик битта тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, улар ўзаро параллел бўлади.***

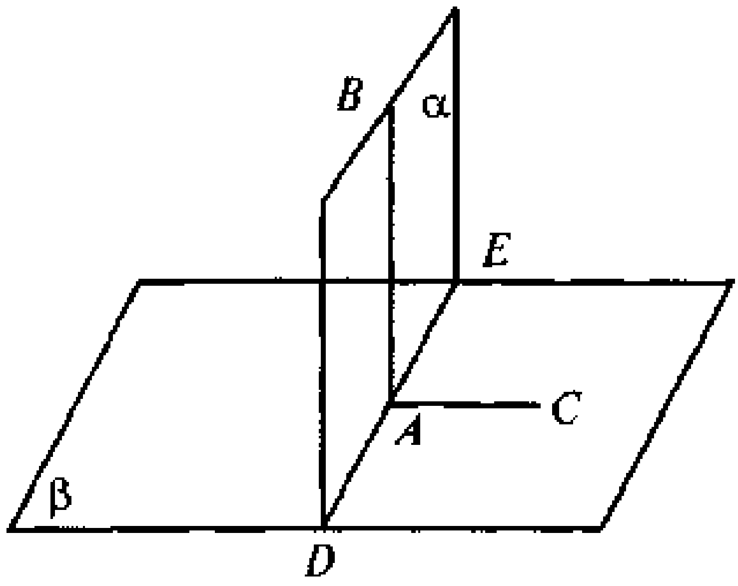
Перпендикуляр текисликлар

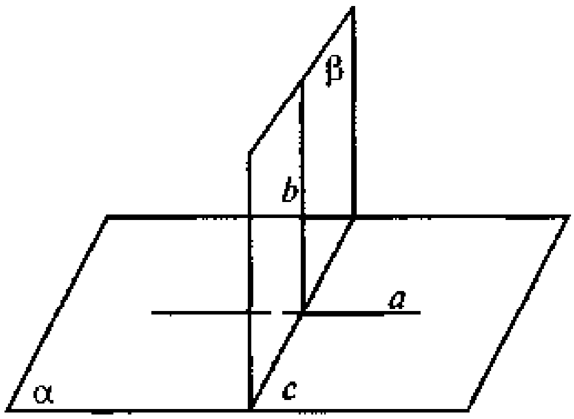
Таъриф. *Агар иккита текислик ўзаро кесишганда икки ёқли тўғри бурчак ҳосил қилса, улар* ***ўзаро перпендикуляр*** *текисликлар дейилади.*

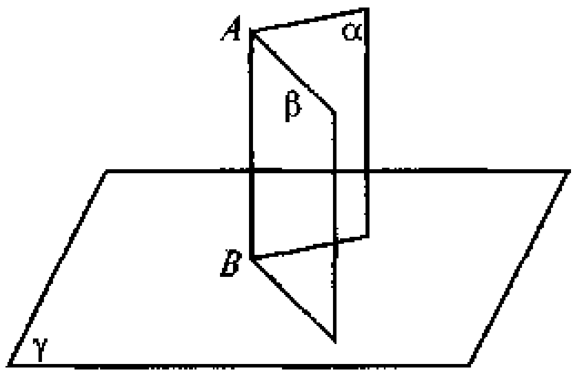
Теорема (икки текисликнинг перпендикулярлик аломати). ***Агар α текислик бошқа β текисликка перпендикуляр бўлган AB тўғри чизиқ орқали ўтса, α текислик β текисликка перпендикуляр бўлади.***

Исботи. α ва β текисликлар DE тўғри чизиқ бўйлаб кесишсин β текисликда *A* нуқта орқали DE тўғри чизиққа перпендикуляр *AC* тўғри чизиқни ўтказамиз. Шартга кўра, $AB \perp \beta$ бўлганлигидан, $AB \perp DE$ ва бўлади. $AE \perp AC$. Демак,— $\angle BAC$ тўғри бурчакдан иборат. У ҳолда унга мос BDEC икки ёқли бурчак ҳам тўғри бурчакдан иборат. Яъни α ва β текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлади. Теорема исботланди.

Теорема. ***Иккита перпендикуляр текисликнинг бирида ётувчи тўғри чизиқ, шу текисликлар кесишган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у иккинчи текисликка ҳам перпендикулар бўлади.***







Исботи.$\alpha \perp \beta$ва улар c тўғри чизиқ бўйлаб кесишсин, яъни $\alpha \cap \beta = c$. β текисликда$b \perp c$тўғри чизиқ ўтказилган ва $b \perp \alpha$ эканлигини исботлаш талаб қилинади.

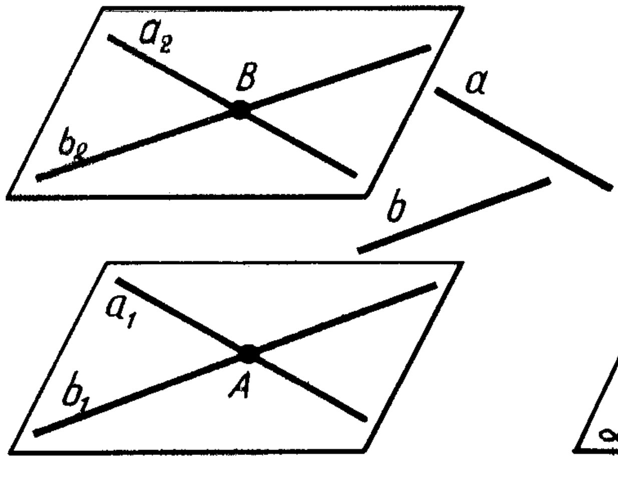
α текисликда b тўғри чизиқ ва α текислик кесишган нуқтадан $a \perp c$ тўғри чизиқни ўтказамиз. a ва b тўғри чизиқларнинг ҳар иккаласи ҳам α ва β текисликлар ўзаро кесишадиган c тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади. Демак, a ва b тўғри чизиқлар орасидаги бурчак α ва β текисликлар орасидаги бурчакка тенг. Шартга кўра,$\alpha \perp \beta \sim$ бўлганлигидан, *а ва b* тўғри чизиқлар орасидаги бурчак 90° га тенг бўлади. Шундай қилиб, b тўғри чизиқ α текисликда ётувчи иккита c ва α тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиши ва, демак, b тўғри чизиқ α текисликнинг ўзига ҳам перпендикуляр бўлиши келиб чиқади. Теорема исботланди.

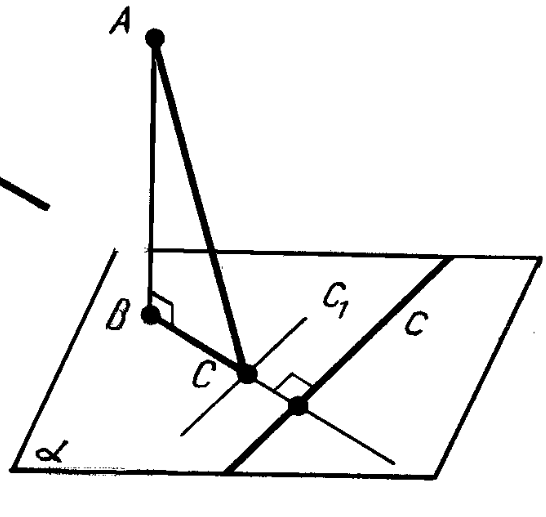
Н а т и ж а. *Агар иккита* α *ва* β *текислик учинчи* γ *текисликка перпендикуляр бўлса,, улар кесишадиган тўғри чизиқ* γ *текисликка перпендикуляр бўлади* .

Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофа ва бурчак

Кесишадигаи иккита тўғри чизиқ қўшни ва вертикал бурчаклар ҳосил қилади. Вертикал бурчаклар тенг, қўшни бурчаклар эса бир-бирини 180^0 гача тўлдиради, Улардан кичигининг бурчак ўлчови тўғри чизиқлар орасидаги бурчак дейилади. Перпендикуляр тўғри чизиқлар орасидаги бурчак таърифга кўра 90° га тенг. Параллел тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни нолга тенг деб ҳисоблаймиз. Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак деб берилган айқаш тўғри чизиқларга параллел кесишувчи тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка айтилади.

Бу бурчак кесишувчи тўғри чизикларнинг танлаб олинишига боғлиқ эмас. Буни мустақил исботлаймиз.





Масала. Оғманинг текисликка проекциясига перпендикуляр бўлган текисликдаги ҳар қандай тўғри чизиқ оғмага ҳам перпендикуляр бўлишинии исботланг. Ва аксинча: агар текисликдаги тўғри чизиқ оғмага перпендикуляр бўлса, у оғманинг проекциясига ҳам перпендикуляр бўлади.

Ечилиши. AB тўғри чизик α гекисликка перпендикуляр, AC — оғма ва c тўғри чизиқ a текисликдаги BC га перпендикуляр бўлсин Оғманинг C асосидан $c_1 \parallel c$ тўғри чизиқ ўтказамиз.

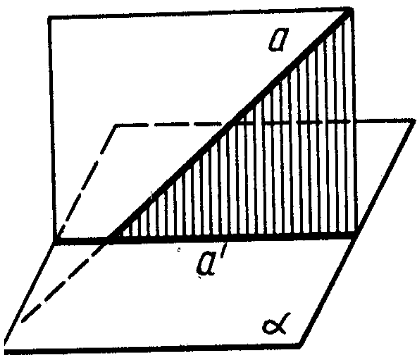
Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага кўра c_1 тўғри чизиқ AC оғмага перпендикуляр бўлади. c тўғри чизиқ билан AC оғма орасидаги бурчак AC ва c_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчаққа тенг бўлгани учун c тўғри чизиқ ҳам AC оғмага перпендикуляр бўлади.

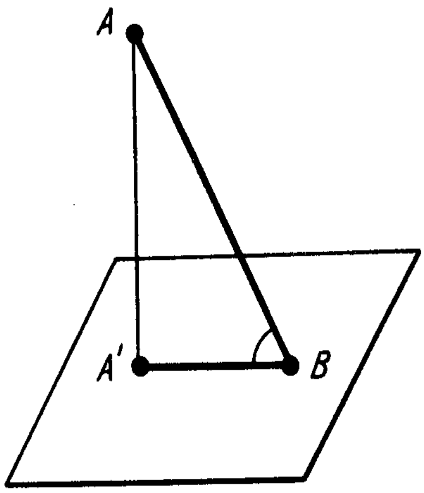
Аксинча: агар c тўғри чизиқ AC оғмага перпендикуляр бўлса, у ҳолда c_1 тўғри чизиқ ҳам унга перпендикуляр бўлади, демак, уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага кўра унинг BC проекциясига ҳам перпендикуляр. $c \| c_1$ бўлгани учун $c \perp BC$ бўлади.

Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак тушунчасига таъриф берамиз.

a — текислик ва a—уни кесиб ўтувчи, лекин унга перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқ бўлсин a тўгри чизиқнинг нуқталаридан α текисликка туширилган перпендикулярларнинг асослари a' тўғри чизиқда ётади. Бу тўғри чизиқ α тўғри чизиқнинг a текисликдаги проекцияси дейилади. Тўгри чизиқ билан унинг текисликдаги проекцияси орасидаги бурчак (тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак дейилади.

Агар тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлса, улар орасидаги бурчак 90° га тенг деб ҳисобланади. Агар улар параллел бўлса, у ҳолда 0° бўлади. a тўғри чизиқ ва унинг а





текисликдаги a' проекцияси ҳамда a текисликнинг a тўғри чизиқ билан кесишган нуқтасидан текисликка ўтказилган перпендикуляр битта текисликда ётгани учун тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак шу тўғри чизик, билан текисликка ўтказилган перпендикуляр орасидаги бурчакни 90^0 га тўлдиради.

Текисликлар орасидаги бурчак

Текисликлар орасидаги бурчак тушунчасини таърифлаймиз. Параллел текисликлар орасидаги бурчак нолга тенг деб ҳисобланади.

Берилган текисликлар кесишади деб фараз қилайлик. Улар янги кесишган туғри чизиғига перпендикуляр текислик ўтказамиз. Бу текислик берилган текисликларни иккита тўғри чизиқ бўйича кесади. Бу тўғри чизиқлар орасидаги бурчак берилган текисликлар орасидаги бурчак дейилади Текисликлар орасидаги бурчакнинг бу тариқа таърифланганлиги кесувчи текисликнинг танланишига боғлиқ эмас.

Саволлар.

1. Фазода тўғри чизиқлар қандай вазиятларда бўлиши мумкин?
2. Айқаш тўғри чизиқларни таърифланг.
3. Фазодаги иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчакка таъриф беринг.
4. Тўғри чизиқ текислик билан қандай вазиятларда бўлиши мумкинлигини айтинг.

2-Мавзу: Фазода тўғри чизиқлар ва текисликларнинг параллел ва перпендикулярлигини ўқитиш

Фазода икки тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашуви; фазода текислик ва тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашуви; фазода икки текисликнинг ўзаро жойлашуви; фазода параллел проекция; амалий машқ ва татбиқлар. Фазода перпендикулар тўғри чизиқ ва текисликлар; фазода перпендикулар, оғма ва масофа; уч перпендикулярлар ҳақидаги теорема; фазода текисликларнинг перпендикулярлиги; амалий машқ ва татбиқ.

Тўғри чизиқ ва текисликка доир баъзи метрик масалалар

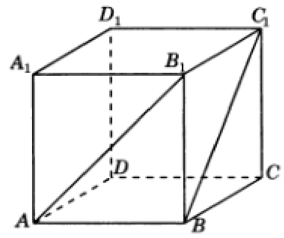
Геометрия ўқитиш жараёнида жуда кўп тушунчаларнинг ўзаро боғланиши натижасида янги-янги қонуниятлар, формулалар, аксиомалар ва теоремалар келтириб чиқарилади. Бу ҳосил қилинган натижаларни киши онгининг инъикосига таъсири ундаги тафаккурни турли хилда ривожлантириши ёки шаклланишига ўз таъсирини кўрсатади. Бу эса ўз навбатида тафаккур турларини у ёки бу қисмини шаклланишига, ривожланишига олиб келади.

Геометрияни ўқитиш жараёнида тафаккур формулаларини системали ишлатамиз ва улар ёрдамида масалалар ечамиз, теоремаларни исбот қиламиз.

Масалан, бевосита масалани ечиш жараёнида анализ ва синтездан унумли фойдаланиб, масала шартидаги номаълум ва маълум компонентлар орасидаги боғланиш қонуниятларини аниқлаймиз. Шу асосда масаланинг ечимини топиш режасини тузиш билан биргаликда уни моделини юзага келтирамиз. Бу жараён ўз навбатида ўқувчиларнинг амалий кўникмаларини шаклланишига ижобий таъсир қилиш билан биргаликда улар тафаккурининг ривожланишига таъсир кўрсатади.

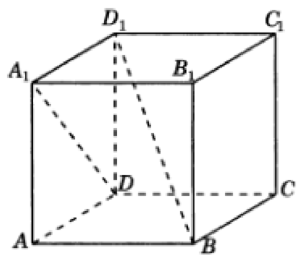
Тафаккур ўзига хос шаклларда: анализда, синтезда ва таққослашда, абстракциялаш, умумлаштириш ва конкретлаштиришда: индукция, дедукция ва аналогияда; боғланиш ва муносабатларни топишда; тушунчаларни шаклланиши; уларни классификациялаш ва системалаштиришда намоён бўлади ва ривожланади. Ўқувчиларнинг тафаккури турли исботлашлар ўтказиш, турли ҳодисаларни тушунтириш йўлларини қидиришда, андазавий бўлмаган яъни, фикр жараёнида талаб қиладиган масалаларни ечишга олиб келади.

1. Қирраси 1 см га тенг $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB_1 ва BC_1 тўғри

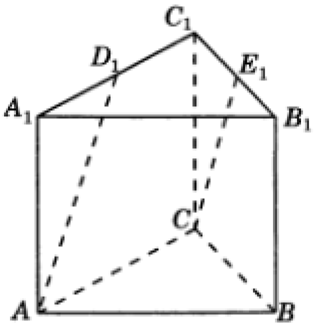


чизиқлар орасидаги бурчакни топинг. (Жавоб: 60^0)

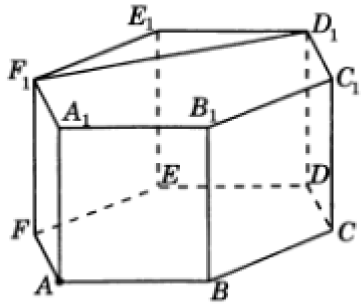
2. Қирраси 1см га тенг $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда DA_1 ва BD_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг. (Жавоб: 90^0)



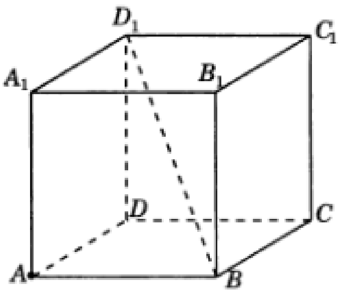
3. Учбурчакли мунтазам $ABCA_1B_1C_1$ призмада, қирраларининг узунликлари 1 см дан бўлса, AD_1 и CE_1 , тўғри чизиқлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг. Бунда D_1 ва E_1 — мос равишда A_1C_1 ва B_1C_1 қирраларнинг ўрта нуқталари. (Жавоб: 0,7)



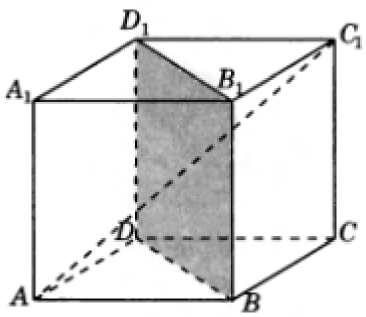
4. Олтибурчакли мунтазам $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ призмада барча қирралари узунликлар 1 см дан, A нуқтадан D_1F_1 тўғри чизиққача масофани топинг. (Ж: $\sqrt{2}$)



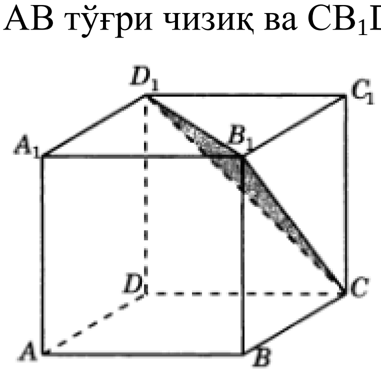
5. Қирраси 1 см га тенг $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда A нуқтадан BD_1 тўғри чизиққача масофани топинг. (Ж: $\frac{\sqrt{6}}{3}$)



6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC_1 тўғри чизиқ ва BDD_1B_1 текислик орасидаги бурчак тангенсини топинг.

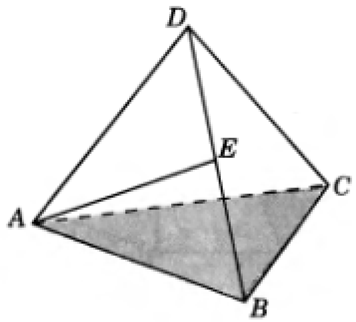


7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB тўғри чизиқ ва CB_1D_1 текислик орасидаги



бурчак синусини топинг.

8. Учбурчакли мунтазам ABCD тетраэдрда E – BD қирранинг ўртаси. AE тўғри чизиқ ва ABC текислик орасидаги бурчак синусини топи



Текширув машқлари

1. Мунтазам ABCD тетраэдрда AB ва CD тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AB ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.
3. Олтибурчакли мунтазам $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$призмада барча қирралари 1 см дан, BA_1 ва DB_1 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак тангенсини топинг.
4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда AC тўғри чизиқ ва BCD_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
5. Олтибурчакли мунтазам SABCDEF пирамиданинг асосининг томони 1см, ён қирраси 2 см бўлса, SA тўғри чизиқ ва SBC текислик орасидаги бурчакни топинг.
6. Олтибурчакли мунтазам $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$призмада барча қирралари 1 см дан, FC_1 тўғри чизиқ ва BCE_1 текислик орасидаги бурчакни топинг.
7. Тўртбурчакли мунтазам SABCD пирамидада барча қирралари 1 см дан, E нуқта – SC қирранинг ўртаси. ABC ва BDE текисликлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда ABC_1 ва BCD_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.
9. Олтибурчакли мунтазам $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$призмада барча қирралари 1 см дан, ABC ва BFE_1 текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

10. Қирраси 1 га тенг $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда B нуқтадан AC_1 тўғри чизиққача масофани топинг.

Такрорлаш учун савол ва топшириқлар

1. Фазода қандай тўғри чизиқлар параллел дейилади?

2. Фазода қандай тўғри чизиқлар айқаш дейилади?

3. Фазода тўғри чизиқларнинг параллеллик аломати.

4. Текисликка параллел тўғри чизиқнинг та'рифи.

5. Тўғри чизиқ ва текисликнинг параллеллик аломати.

6. Икки текислик қачон параллел дейилади?

7. Текисликларнинг параллеллик аломати.

8. Параллел текисликлар орасида жойлашган параллел то'г' ри чизиқларнинг •хоссаси.

9. Параллел текисликлардан бирини кесиб ўтувчи тўғри чизиқнинг хоссаси.

10. Параллел тўғри чизиқлардан бирини кесиб ўтувчи текисликнинг хоссаси.

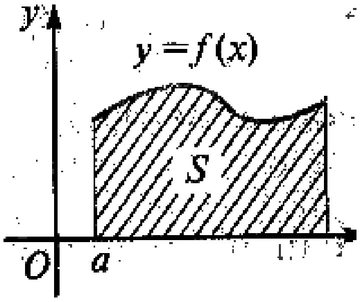
11. Тўғри чизиқда ётмаган нуқтадан берилган тўғри чизиққа параллел ягона тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.

12. Текисликда ётмаган нуқтадан берилган текисликка параллел ягона текислик ўтказиш мумкинлигини исботланг.

3-ТАНЛОВ МАВЗУСИ: МАТЕМАТИКА ДАРСЛАРИДА АНИҚ ИНТЕГРАЛ ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИНИ ЎҚИТИШ МЕТОДИКАСИ

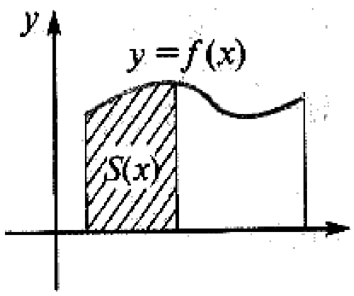
1-Мавзу: Аниқ интеграл ва Нютон-Лейбниц формуласи, уларни ўқитиш методикаси. (2 соат назарий)

Аниқ интеграл таърифи, Нютон-Лейбниц формуласи. Аниқ интеграл хоссалари ва уларга оид мисоллар ечиш. Аниқ интегралнинг татбиқлари ҳақида умумий маълумотлар бериш, ёй узунлиги, текис фигура юзини топиш, аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш ларга доир мисол ва масалалар ечиш.

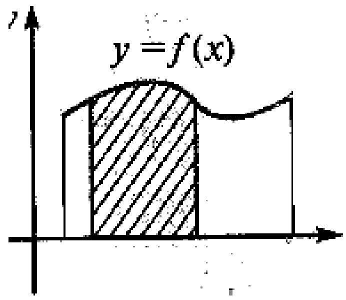


Расмда тасвирланган шаклни кўрайлик. Бу шакл қуйидан Ох ўқдаги [*a;b*] кесма билан, юқоридан мусбат қиймат қабул қиладиган *y=f(x)* узлуксиз функциянинг графиги билан, ён томонлардан еса *x=a* ва *x=б* тоғри чизиқларнинг кесмалари билан чегараланган. Бундай шакл ***эгри чизиқли трапеция*** дейилади.

Эгри чизиқли трапециянинг S юзини f(x) функциянинг бошланғич функцияси ёрдамида қандай ҳисоблаш мумкинлигини аниқлаймиз.



[*a; x*] асосли егри чизиқли трапециянинг юзини S(x) деб белгилаймиз (3-расм), унда *x* шу [a; b] кесмадаги исталган нуқта: *x* = *a* бўлганда [*a; x*] кесма нуқтага айланади, шунинг учун S(*a*) = 0; *x*=*b* да S(b) = S.



S(x) ни f(x) функциянинг бошланғич функцияси бўлишини, яъни S′(x) = f(x) еканини кўрсатамиз.

S(x+h)- S(x) айирмани кўрайлик, бунда h > 0 (h < 0 ҳол ҳам худди шундай кўрилади). Бу айирма асоси [*x; x + ҳ*] бўлган эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг (4-расм). Агар h сон кичик бўлса, у ҳолда бу юз тақрибан f(x)·h га тенг, я'ни S(x+ h) –S(x) ≈ f(x)·h.

Демак, $\frac{S(x+h)-S(x)}{h} \approx f(x)$. Бу тақрибий тенгликнинг чап қисми h $\to 0$ да ҳосиланинг таърифига кўра S′(x) га интилади, яқинлашиш хатолиги еса h $\to 0$ да исталганча кичик бўла боради.

Шунинг учун h $\to 0$ да S′(x) = f(x) тенглик ҳосил бўлади. Бу еса S(x) нинг f(x) функциянинг бошланғич функцияси эканини билдиради.

f(x) функциянинг исталган бошқа F(x) бошланғич функцияси F(x) дан ўзгармас сонга фарқ қилади, яъни

$$F(x) = S(x) + S \qquad (1)$$

Бу тенгликдан *x=a* да F(*a*)=S(*a*)+S ни оламиз. S(*a*)=0 бўлгани учун S=F(*a*) ва (1) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S(x) = F(x) - F(a).$$

Бундан *x* =*b* да

$$S(b) = F(b)-F(a)$$

ни топамиз.

Демак, *эгри чизиқли трапециянинг юзини* қуйидаги формула орқали ҳисоблаш мумкин:

$$\boxed{S=F(b)-F(a)} \qquad (2)$$

бунда F(x) — берилган f(x) функциянинг исталган бошланғич функцияси.

Шундай қилиб, эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисоблаш f(x) функциянинг F(x) бошланғич функциясини топишга, яъни f(x) функцияни интеграллашга келтирилади.

F(b)-F(a) айирма f(x) функциянинг [a;b] кесмадаги интеграли дейилади ва бундай белгиланади: $\int_a^b f(x)dx$ (ўқилиши: „*a* дан b гача интеграл еф икс де икс"), я'ни

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)} \qquad (3)$$

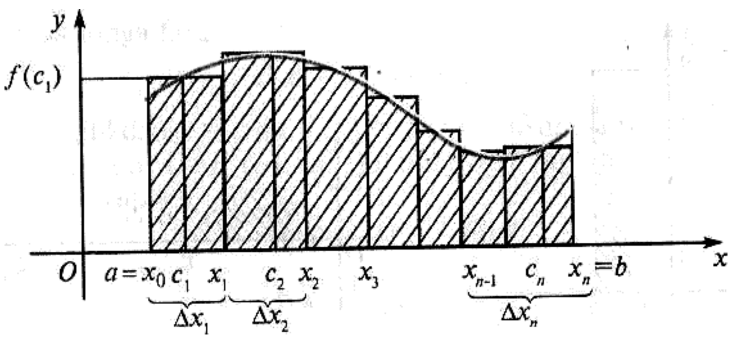
(3) формулани дифференциал ва интеграл ҳисоб асосчилари шарафига *Нютон — Лейбниц формуласи* деб аталади. (2) ва (3) формуладан қуйидагини оламиз:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx} \qquad (4)$$

Интеграл тарихан эгри чизиқлар билан чегараланган *шаклларнинг юзини,* хусусан, егри чизиқли трапециянинг юзини *ҳисоблаш муносабати билан келиб чиққан.*

Қуйидаги расмда тасвирланган эгри чизиқли трапецияни кўрайлик.

Бу расмда трапециянинг асоси бўлган *[a ; b]* кесма $x_1, x_2, \dots, x_{н-1}$ нуқталар билан *h* та кесмага (тенг бўлиши шарт эмас) бўлинган. Бу нуқталардан вертикал тўғри чизиқлар ўтказилган. Биринчи $[x_0;x_1]$ кесмада ихтиёрий c_1 нуқта танланган ва бу кесмада баландлиги $f(c_1)$ бўлган тўғри тўртбурчак ясалган; иккинчи $[x_1; x_2]$ кесмада c_2 нуқта танланган ва бу кесмада баландлиги $f(c_2)$ бўлган тўғри тўртбурчак ясалган ва ҳоказо. Берилган эгри чизиқли трапециянинг юзи ясалган тўғри тўртбурчаклар юзлари



йиғиндисига тақрибан тенг:

$$S_н = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + \ldots + f(c_h)\Delta x_h \qquad (5)$$

бунда $\Delta x_и$ - бўлиниш кесмаларининг узунлиги, я'ни $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ ва ҳоказо. Шундай қилиб, эгри чизиқли трапециянинг S юзини тақрибан (5) формула орқали ҳисоблаш мумкин, яъни $S \approx S_h$.

(5) йиғиндини f(x) *функциянинг* [a; b] *кесмадаги интеграл йиғиндиси* дейилади. Бунда f(x) функция [a; b] кесмада узлуксиз ва исталган қийматни (мусбат, манфий ва нолга тенг) қабул қила олади, деб тахмин қиламиз.

Агар $h \to \infty$ ва бўлиниш кесмалари узунликлари нолга интилса, у ҳолда S_h интеграл йиғинди бирор сонга интилади, ана шу сонни f(x) функциянинг [$a;b$] кесмадаги интеграли дейилади ва

$$\int_a^b f(x)dx$$

кўринишда белгиланади.

Аниқ интегралнинг хоссалари

1^0. $\int_a^b 1 \cdot dx = b - a$.

2^0. Агар $f(x)$ функция [$a;b$] да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $kf(x)$ (k=sonst) ҳам интегралланувчи ва

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

бўлади.

3^0. Агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар [$a;b$] да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f_1(x)+ f_2(x)$ ҳам [$a;b$] да интегралланувчи ва

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

тенглик ўринли бўлади.

Исботи. Маълумки, агар $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг бошланғич функциялари мос равишда $F_1(x)$, $F_2(x)$ бўлса, у ҳолда $f_1(x) + f_2(x)$ функциянинг бошланғич функцияси $F_1(x)+F_2(x)$ бўлади. Ньютон-Лейниц формуласига кўра $\int_a^b f_1(x)dx = F_1(b) - F_1(a)$, $\int_a^b f_2(x)dx = F_2(b) - F_2(a)$. Шунингдек,

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = (F_1(x) - F_2(x))\Big|_a^b = (F_1(b) - F_2(b)) - (F_1(a) - F_2(a)) =$$

$$=(F_1(b)-F_1(a))+(F_2(b)-F_2(a))=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx\,.$$

4^0. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$, яъни интеграллаш чегараларининг ўрнини алмаштирсак, аниқ интеграл ишорасини қарама-қаршисига ўзгартади.

5^0. (Агар *f(x)* функция учун $\int_a^c f(x)dx, \int_a^b f(x)dx, \int_c^b f(x)dx$ мавжуд бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

6^0. Агар [*a;b*] да *f(x)* интегралланувчи ва *f(x)*≥0 бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ бўлади.

[*a;b*] kesmada uzluksiz va nomanfiy *f(x)* funksiyaning grafigi, *Ox* o‘q, *x=a* va *x=b* to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan tekis figura *aABb egri chiziqli trapetsiya* deb atalar edi. Aniq integralning geometrik ma’nosiga ko‘ra $\int_a^b f(x)dx\frac{1}{2}$ aniq integral son jihatdan shu egri chiziqli trapetsiya yuziga teng bo‘ladi:

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

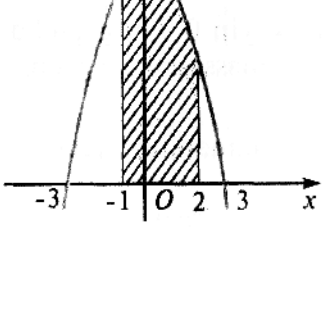
Agar yassi figura quyidan *y=0* to‘g‘ri chiziq o‘rniga $y=\varphi(x)$ $(\varphi(x)\leq f(x),\quad x\in[a;b])$ chiziq bilan chegaralangan bo‘lib, $\varphi(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$S=\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx$$

bo‘ladi.

Yuzalarni integrallar yordamida hisoblash.

1-masala. Ox o`qi, x=-1, x=2 chiziqlar va $y=9-x^2$ parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblang.

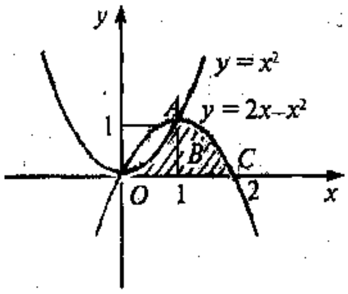


$y=9-x^2$ grafigini yasymiz va berilgan trapetsiyani tasvirlaymiz. Izlanayotgan S yuza $S=\int_{-1}^{2}(9-x^2)dx$ integralga teng. Nyuton-Leybnis formulasidan topamiz:

$$S=\int_{-1}^{2}(9-x^2)dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(9\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(9\cdot(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=24.$$

2-masala. $y=x^2$, $y=2x-x^2$ parabolalar va Ox o`qi chegaralangan shaklning yuzini toping.

$y=x^2$, $y=2x-x^2$ funksiyalarning grafiklarini yasaymiz va $x^2=2x-x^2$ tenglamadan bu funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtalari abssissalarini topamiz. Bu tenglamaning ildizlari $x_1=0$ va $x_2=1$.

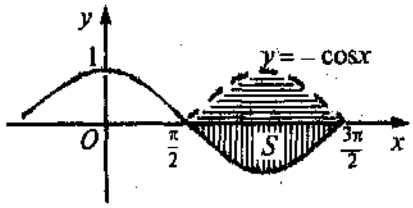


Rasmdan ko`rinib turibdiki, bu shakl ikkita egri chiziqli trapetsiyadan tuzilgan. Demak, izlanayotgan yuza bu trapetsiyalar yuzlarining yig`indisiga teng:

$$S=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2x-x^2)dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1+\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=1.$$

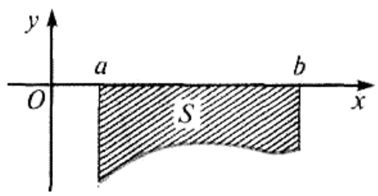
3-masala. Ox o`qining $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ kesmasi va y=cosx funksiyaning bu kesmadagi grafigi bilan chegaralangan shaklning S yuzini toping.

Bu shaklning yuzi Ox o`qiga nisbatan bu shaklga simmetrik shaklning yuziga tengligi ravshan, ya'ni Ox o`qining $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ kesmasi va y=-cosx funksiyaning bu kesmadagi grafigi bilan chegaralangan shaklning yuziga teng. Bu kesmada $-\cos x \geq 0$ va shuning uchun



$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos x)dx=(-\sin x)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\left(-\sin\frac{3\pi}{2}\right)-\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right)=2.$$

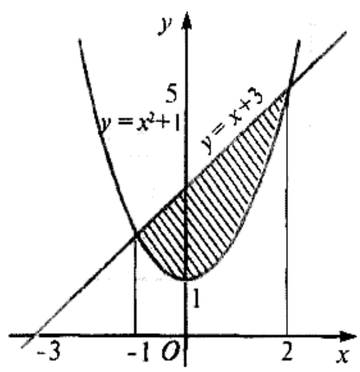
Eslatma. *Umuman, agar [a;b] kesmada $f(x)\leq 0$ bo`lsa, u holda egri chiziqli trapetsiyaning yuzi* $S=\int_a^b(-f(x))dx$ *ga teng bo`ladi.*



4-masala. $y=x^2+1$ parabola va $y=x+3$ to`g`ri chiziq bilan chegaralangan shaklning yuzini toping.

$y=x^2+1$ va $y=x+3$ funksiyalarning grafiklarini yasaymiz. $x^2+1=x+3$ tenglamadan bu grafiklar kesishadigan nuqtalarning abssissalarini topamiz. Bu tnglama $x_1=-1$, $x_2=2$ ildizlarga ega.

Rasmdan lo`rinadiki, izlanayotgan yuzani



birinchisi yuqoridan y=x+3 to`g`ri chiziq, ikkinchisi esa $y=x^2+1$ parabola yoyi bilan chegralangan hamda [-1;2] kesmaga tiralgan ikkita trapetsiya S_1 va S_2 yuzalarining ayirmasi sifatida topish mumkin:

$$S_1=\int_{-1}^{2}(x+3)dx, \qquad S_1=\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$$

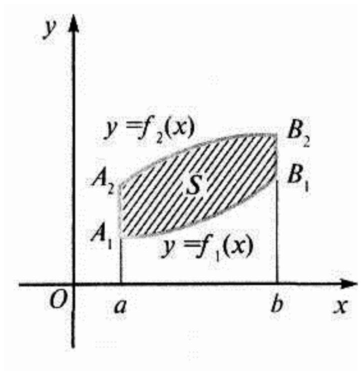
Bo`lgani uchun

$$S=S_1-S_2=\int_{-1}^{2}(x+3)dx-\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$$

Boshlang`ich funksiya xossasidan foydalanib, S ni bitta integral ko`rinishida yozish mumkin:

$$S=\int_{-1}^{2}((x+3)-(x^2+1))dx=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=4{,}5.$$

Umuman, rasmda tasvirlangan shaklning yuzi quyidagiga teng:



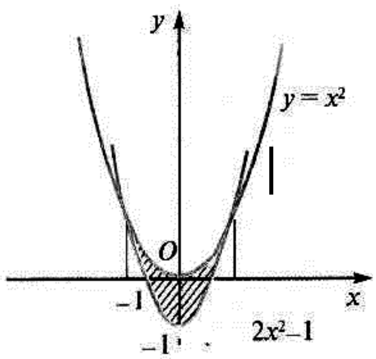
$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx$$

Bu formula $f_2(x) > f_1(x)$ shartni qanoatlantiradigan $f_1(x)$ va $f_2(x)$ (istalgan ishorali qiymatlarni qabul qiladigan) uzluksiz funksiyalar uchun to'g'ridir.

5-masala. $y = x^2$ va $y = 2x^2 - 1$ parabolalar bilan chegaralangan shaklning S yuzini toping.

Berilgan shaklni yasaymiz (va $x^2 = 2x^2-1$ tenglamadan parabolalar kesishishadigan nuqtalaming abssissalarini topamiz.

Bu tenglama $x_{1,2} = \pm 1$ ildizlarga ega. Yuqoridagi formuladan foydalanamiz.

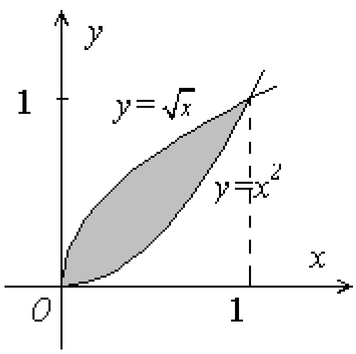


Bunda $f_1(x) = 2x^2 - 1$, $f_2(x) = x^2$:

$$S=\int_{-1}^{1}(x^2-(2x^2-1))dx=\int_{-1}^{1}(-x^2+1))dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}.$$

6-masala. $y=x^2$ va $x=y^2$ chiziqlar bilan chegaralanagan figuraning yuzini toping.

Yechish. Berilgan figura yuqoridan $y=\sqrt{x}, \quad 0\le x\le 1$ chiziq bilan, quyidan esa $y=x^2$, $0\le x\le 1$ chiziq bilan chegaralangan. Shuning uchun

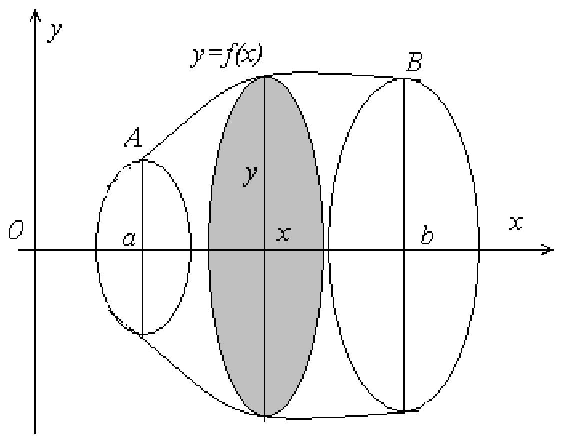


$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

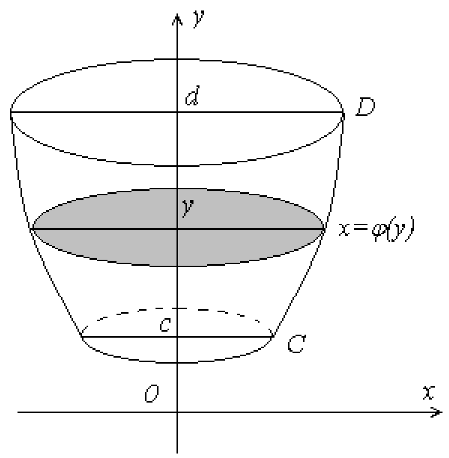
Aylanma jism hajmini hisoblash. *Ox* o‘q atrofida *aABb* egri chiziqli trapetsiyani aylantirishdan hosil bo‘lgan jismni qaraymiz. Bunda *aABb* trapetsiyani *y=f(x)* egri chiziq, *Ox* o‘qi, *x=a* va *x=b* to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan deb qaraymiz (1-rasm). Agar bu jismga *Ox* o‘qqa perpedikulyar tekisliklar bilan kesib o‘tsak, kesimda radiusi *y=f(x)* ning moduliga teng bo‘lgan doiralar hosil bo‘ladi. Demak, bu holda ko‘ndalang kesim yuzi

$S(x)=\pi y^2=\pi(f(x))^2$ bo‘ladi.

Aylanma jism hajmini hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanamiz:



1-rasm



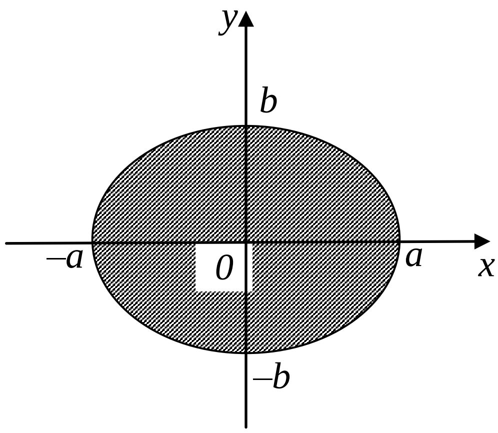
2-rasm

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b(f(x))^2dx \qquad (1)$$

Agar jism *cCDd* trapetsiyani *Oy* o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan bo‘lsa (2-rasm), u holda uning hajmi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$V=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d(\varphi(y))^2dy,$$ bu yerda

$x=\varphi(y),\quad y\in[c,d]$ *CD* chiziq tenglamasi.



1-*misol*. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsni *Ox* o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

Yechish. (1) formulaga ko‘ra

$$V=\int_{-a}^a\pi y^2dx=\int_{-a}^a\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-a}^a=2\pi\frac{b^2}{a^2}(a^3-\frac{a^3}{3})=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Эгри чизиқ ёйининг узунлигини ҳисоблаш.

1. Агар текис эгри чизиқ узининг $y=f(x)$ тенгламаси билан берилган бўлиб, $y' = f'(x)$ ҳосила узлуксиз бўлса, у ҳолда эгри чизиқнинг $[a;b]$ кесмага мос келувчи ёйининг узунлиги $l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$ формула билан ҳисобланади.
2. Эгри чизиқ ўзининг $x{қ}x(t)$ ва $y{қ}y(t)$ каби параметрик шаклдаги тенгламаси билан берилган бўлсин. Агар $x'(t)$ ва $y'(t)$ ҳосилалар $[\alpha;\beta]$ кесмада узлуксиз бўлсалар, мазкур эгри чизиқнинг $[\alpha;\beta]$ кесмага мос келувчи ёйининг узунлиги $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$ формула орқали ҳисобланади. Бу ерда: $\alpha \le t \le \beta$.
3. Айтайлик, эгри чизиқнинг тенгламаси қутб координаталари системасида $\rho = \rho(\theta)$ тенглама билан берилган бўлсин: У ҳолда унинг бирор AB ёйининг узунлиги $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta$ формула билан ҳисобланади. Бу ердаги α ва β лар қутб бурчакларининг AB ёй учларига мос келувчи қийматларидир.

1-Мисол. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ функция билан берилган эгри чизиқнинг абсциссалари $x{қ}1$ ва $x{қ}2$ бўлган нуқталари орасидаги ёйининг узунлиги ҳисоблансин.

Ечилиши. $y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$ ва $y'^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}$ бўлганлигидан,

$1 + y'^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2$ дан иборатдир.

У холда:

$$l = \int_1^2 \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)dx = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right)\Bigg|_1^2 = 1 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

1. $y=x/2$, $x=4$, $x=6$ to‘g‘ri chiziqlar va absissa o‘qi bilan chegaralangan trapetsiyani Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning hajmini toping.

2. $y = \frac{x^2}{4}$ parabola $y=1$, $y=5$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan figurani ordinata o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning hajmini toping.

3. $y^2=4x$ parabola va $x=4$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan figurani Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning hajmini toping.

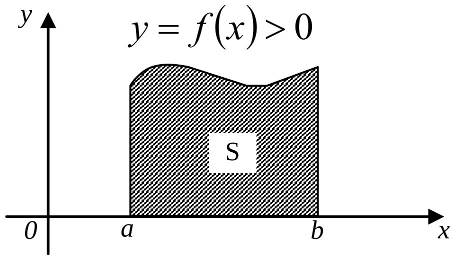
4. $y=x^2-4$ parabola va abssissa o‘qi bilan chegaralangan trapetsiyani Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning hajmini toping.

2-Мавзу: Аниқ интегралнинг татбиқларини ўқитиш методикаси (2 соат амалий)

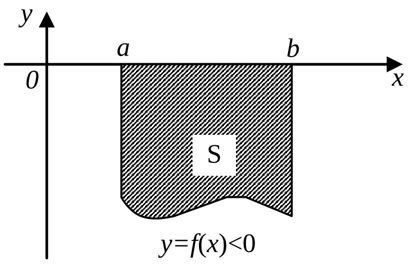
Айланма сиртларнинг юзи ва айланма жисмларнинг хажмларини ҳисоблаш.

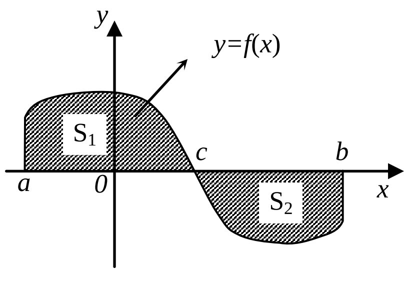
Аниқ интеграл ёрдамида физика ва механика масалаларини ечиш.

1. Маълумки, агар [*a; b*] кесмада $f(x)\geq 0$ бўлса, мазкур функциянинг мазкур кесма бўйича аниқ интеграли геометрик жихатдан *хқа* ва *хқb* тўғри чизиқлар,*Ox* ўқи хамда $y=f(x)$ эгри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини ифодалар эди.



Агар [*a; b*] кесмада $f(x)\leq 0$ бўлса, мазкур эгри чизиқли трапеция *Ox* ўқидан пастда жойлашади ва унинг юзи $S=\int\limits_a^b |f(x)|dx$ формула орқали ҳисобланади.

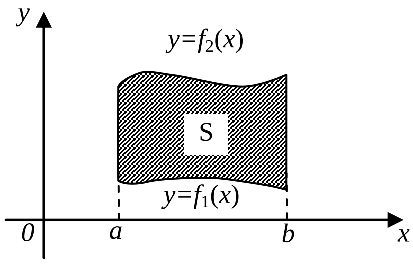




Агар $y=f(x)$ эгри чизиқ, *Ox* ўқи ва *x=a, x=b* тўғри чизиқлар билан чегараланган фигура *Ox* ўқидан юқорида ва пастда жойлашган бўлса, унинг юзи $S=S_1+S_2=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b |f(x)|dx$ формула билан ҳисобланади

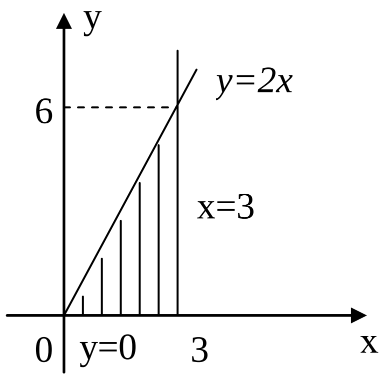
Агар *x=a, x=b* тўғри чизиқлар, $y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ эгри чизиқлар $(f_1(x)\leq f_2(x))$ билан чегараланган юзани ҳисоблаш лозим бўлса, уни ушбу

$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_2(x)\right]dx$ формула билан ҳисобланади.

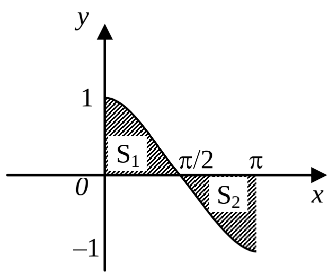


1-Мисол. Тенгламалари *y=2x, y=0* ва *x=3* бўлган тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи ҳисоблансин.

Ечилиши. $S=\int_0^3 2xdx=2\int_0^3 xdx=x^2\Big|_0^3=9$ кв.б.



2-Мисол. *y=cosx, y=0* чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи ҳисоблансин, бунда $x\in[0;\pi]$.

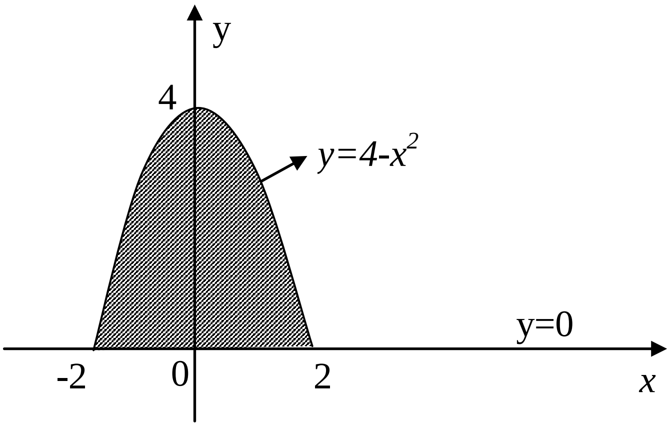


Ечилиши.

$$S=S_1+S_2=\int_0^{\pi/2}\cos x dx+\int_{\pi/2}^{\pi}\left|\cos x\right|dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}+\left|\sin x\right|\Big|_{\pi/2}^{\pi}=1+1=2 \text{ кв.б.}$$

3-Мисол. *y=0* ва $y=-x^2+4$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи ҳисоблансин.

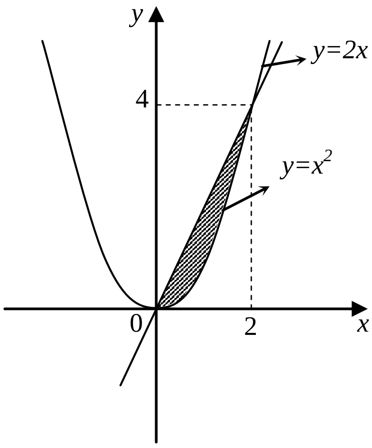
Ечилиши. Бу ерда ҳисобланиши лозим бўлган юза $y=4-x^2$ парабола билан *Ox* ўқ орасида жойлашган. Агар *y=0* бўлса, $x=\pm 2$.



$$S=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=2\int_{0}^{2}\left(4-x^2\right)dx=2\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=2\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}\ \text{кв.б.}$$

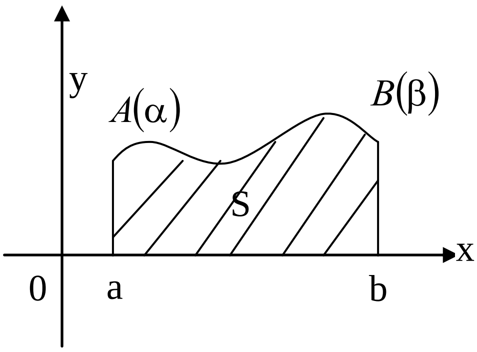
<u>4-Мисол.</u> Тенгламалари $y=x^2$ ва $y=2x$ бўлган парабола ва тўғри чизиқ орасида жойлашган юза ҳисоблансин.

<u>Ечилиши.</u> $y=x^2$ ва $y=2x$ тенгламаларни биргаликда ечиб, парабола билан тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарининг абсциссалари $x_1=0$ ва $x_2=2$ ларни топамиз. $S=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ кв.б.

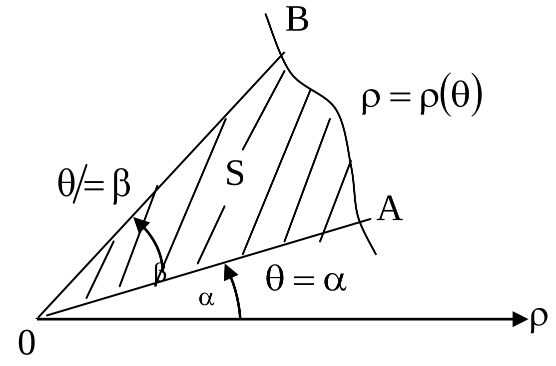


2. а) Агар эгри чизиқли трапециянинг юзи $x=x(t)$, $y=y(t)$ каби параметрик шаклда берилган эгри чизиқ, $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиқлар ҳамда Ox ўқ билан чегараланган бўлса, у юза қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \text{ бунда } \alpha\le t\le\beta \text{ ва } x(\alpha)=a,\ x(\beta)=b$$



б) Агар $(\rho;\theta)$ қутб координаталари системасида бирор узлуксиз эгри чизиқ ўзининг $\rho = \rho(\theta)$ каби тенгламаси орқали берилган бўлса, у холда $\theta = \alpha, \theta = \beta$ қутб бурчаклари ҳамда эгри чизиқнинг AB ёйи билан чегараланган AOB сектор юзи $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta$ формула билан ҳисобланади.



<u>5-Мисол.</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс билан чегараланган юза топилсин.

<u>Ечиш.</u> Эллипснинг параметрик тенгламасини ёзиб оламиз: $x = a\cos t,\ y = b\sin t$. У холда

$$S = \int_0^{2\pi} в\text{sint(-asint)dt} = \text{-ab}\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 2t - 1)dt = \frac{ab}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi} - t\Big|_0^{2\pi}\right] =$$

$= -\pi ab.$ $\qquad S = |-\pi ab| = \pi ab$ *кв.б.*

<u>6-Мисол.</u> $\rho^2 = 2\cos 2\theta$ лемниската билан чегараланган юза топилсин.

<u>Ечиш.</u> Изланаётган юзанинг тўртдан бир қисмига $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ бурчак мос келади. Шунинг учун $S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta d\theta = 2\sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = 2$ кв.б.

<u>МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР</u>

<u>Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган юзалар ҳисоблансин.</u>

1. $y = 0, y = 3 - 2x + x^2;$
2. $x = e, y = 0, y = \ln x;$
3. $y = 0; x \pm 1, y = x^2 - 2x;$
4. $y = x + 4, y = x^2 + 4x$
5. $y = 0; y = 4x - x^2;$

11. $x = 2, x = 3, y = 0, y = x^2;$
12. $y \ = x, y \ge 0, x = 1, x = 4;$
13. $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi;$
14. $\rho = 3\cos 2\varphi;$
15. $\rho = 2\cos 4\varphi;$

6. $x=0, y=8, y=x^3;$

7. $y=-x; y=2x-x^2;$

8. $x=1, y=e^{-x}, y=e^x;$

9. $x+y=3, y=1+x^2;$

10. $x=4, y=0, y=3x^2-6x;$

16. $\rho=2, \rho=2(1-\cos\theta);$

17. $y=0, y=x^2+6x+5;$

18. Ox ўқи ва $x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t)$ циклоиданинг бир аркаси.

19. $x=1, x=2, y=2x^2;$

20. $x+y=4, xy=3;$

Эгри чизиқ ёйининг узунлигини ҳисоблаш.

1. Агар текис эгри чизиқ узининг *y=f(x)* тенгламаси билан берилган бўлиб, $y'=f'(x)$ ҳосила узлуксиз бўлса, у ҳолда эгри чизиқнинг [*a;b*] кесмага мос келувчи ёйининг узунлиги $l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$ формула билан ҳисобланади.
2. Эгри чизиқ ўзининг *x=x(t)* ва *y=y(t)* каби параметрик шаклдаги тенгламаси билан берилган бўлсин. Агар $x'(t)$ ва $y'(t)$ ҳосилалар $[\alpha;\beta]$ кесмада узлуксиз бўлсалар, мазкур эгри чизиқнинг $[\alpha;\beta]$ кесмага мос келувчи ёйининг узунлиги $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$ формула орқали ҳисобланади. Бу ерда: $\alpha\le t\le\beta$.
3. Айтайлик, эгри чизиқнинг тенгламаси қутб координаталари системасида $\rho=\rho(\theta)$ тенглама билан берилган бўлсин: У ҳолда унинг бирор *AB* ёйининг узунлиги $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$ формула билан ҳисобланади. Бу ердаги α ва β лар қутб бурчакларининг *AB* ёй учларига мос келувчи қийматларидир.

1-Мисол. $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ функция билан берилган эгри чизиқнинг абсциссалари *x=1* ва *x=2* бўлган нуқталари орасидаги ёйининг узунлиги ҳисоблансин.

Ечилиши. $y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}$ ва $y'^2=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}$ бўлганлигидан, $1+y'^2=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2$ дан иборатдир.

У холда:

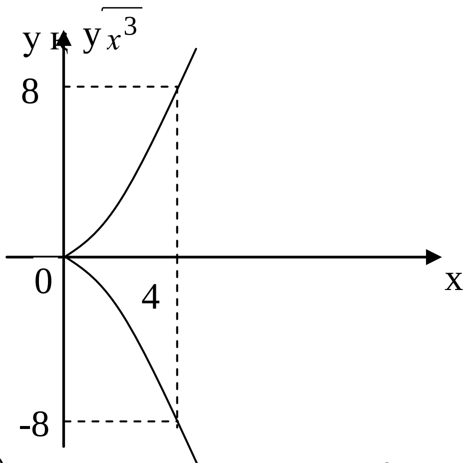
$$l=\int_1^2\sqrt{1+y'^2}dx=\int_1^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln x\right)\Bigg|_1^2=1+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

2-Мисол. Тенгламаси $y^2 = x^3$ бўлган яримкубик параболанинг (0; 0) ва (4;8) нуқталар орасидаги ёйининг узунлиги хисоблансин.

Ечилиши. Берилган нуқталар I-чоракда жойлашганликлари учун $y = \sqrt{x^3}$,

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} \text{ ва } \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x} \text{ дир}.$$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$



3-Мисол. $\rho = 2(1+\cos\theta)$ кардиоиданинг $0 \le \theta \le \pi$ га мос келувчи ёйининг узунлиги ҳисоблансин.

Ечилиши. $\rho' = -2\sin\theta$ лигидан,

$$l = \int_0^\pi \sqrt{4(1+\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta}d\theta = \int_0^\pi \sqrt{4\left[1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]}d\theta =$$

4

$$= 2\int_0^\pi \sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta = 4\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}d\theta = 8\sin\frac{\theta}{2}\Bigg|_0^\pi = 8.$$

3. Айланма сиртларнинг юзи ва айланма жисмларнинг хажмларини ҳисоблаш.

1. Айтайлик, эгри чизиқ *уқf(x)* тенглама орқали берилган бўлсин. Агар бу функция [a;b] кесмада узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, эгри чизиқнинг [a;b] га мос келувчи *AB* ёйи *Ox* ўқ атрофида айлантирилса, у ҳолда ҳосил бўладиган айланма сиртнинг юзи $S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ формула билан ҳисобланади.

   Агар эгри чизиқ бошқа ҳилдаги тенгламалари билан берилган бўлса, у ҳолда мазкур юзани ҳисоблаш учун юқоридаги формуладаги ҳар бир ҳолга мос келувчи алмаштиришларни бажариш етарлидир.

2. а) Агар эгри чизиқли трапеция *уқf(x)* эгри чизиқ *хқа* ва *хқb* вертикал тўғри чизиқлар ҳамда *Ox* ўқ билан чегараланган бўлсин. У ҳолда уни *Ox* ва *Oy* ўқлар атрофида

айлантиришдан ҳосил бўладиган айланма жисмларнинг хажмлари мос равишда қуйидаги формулалар билан ҳисобланади.

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx;\ V_y = 2\pi\int_a^b xydx.$$

Бу ерда ҳам, агар эгри чизиқ ўзининг *yқf(x)* каби тенгламасидан бошқа ҳилдаги тенгламалари билан берилган бўлса, юқоридаги формулада керакли алмаштиришлар бажарилади.

б) Агар $y_1 = f_1(x)$ ва $y_2 = f_2(x)(f_1(x) \le f_2(x))$ эгри чизиқлар, *хқa* ва *хқb* тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг *Ох* ва *Оy* ўқлари атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма жисмларнинг ҳажмлари мос равишда.

$V_x = \pi\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)dx$ ва $V_y = 2\pi\int_a^b x(y_2 - y_1)dx$ каби формулалар билан ҳисобланади.

1-Мисол. Тенгламаси $y = \frac{1}{2}\sqrt{4x-1}$ бўлган эгри чизиқ ёйининг $x_1 = 1$ дан $x_2 = 9$ гача бўлган қисми *Ох* атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт юзи ҳисоблансин.

Ечилиши. $y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2\sqrt{4x-1}} = \frac{1}{\sqrt{4x-1}}$ ва $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4x-1}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{4x-1}}$ ларни инобатга олсак

$$S_x = 2\pi\int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{4x-1}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{4x-1}}dx = 2\pi\int_1^9 \sqrt{x}dx = 2\pi\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{104\pi}{3}.$$

2-Мисол. $y^2 = 4 + x$ парабола ёйининг абциссалари $x_1 = -4$ ва $x_2 = 2$ бўлган нуқталари орасида жойлашган бўлагининг Ох ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлаги айланма сиртнинг юзи аниқлансин.

Ечилиши. $y = \sqrt{4+x},\ y' = \frac{1}{2\sqrt{4+x}},\ y'^2 = \frac{1}{4(4+x)}$ ларга асосан

$$S_x = 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{4+x}\sqrt{1+\frac{1}{4(4+x)}}dx = 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{4+x+\frac{1}{4}}dx = 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{x+\frac{17}{4}}dx =$$

$$= 2\pi\int_{1/2}^{5/2} 2t^2dt = \frac{4\pi}{3}t^3\Big|_{1/2}^{5/2} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{125}{8} - \frac{1}{8}\right) = \frac{4\pi\cdot 124}{3\cdot 8} = \frac{62\pi}{3}\ \text{кв.б.}$$

Бу интегрални ҳисоблашда $x + \frac{17}{4} = t^2,\ dx = 2tdt,\ \frac{1}{2} \le t \le \frac{5}{2}$ алмаштириш бажарилди.

3-Мисол. $y = \frac{x^2}{2}$ параболанинг $y = \frac{3}{2}$ тўғри чизиқ билан кесилган бўлагининг *Оy* ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзи ҳисоблансин.

<u>Эслатма.</u> *Агарда* $x=\varphi(y)$ *силлиқ эгри чизиқннг ёйи Оу ўқ атрофида айланса, айланма сиртнинг юзи* $S_y = 2\pi\int\limits_c^d x\sqrt{1+x'^2}\,dy$ *формуладан топилади.*

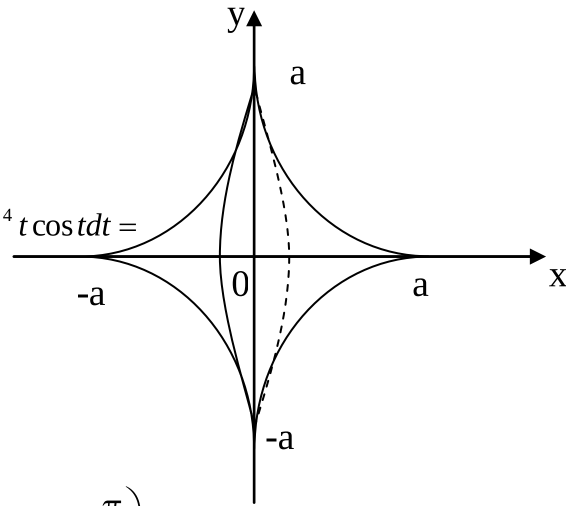
<u>Ечилиши.</u> $x=\sqrt{2y},\ x'=\frac{1}{\sqrt{2y}},\ x'^2=\frac{1}{2y},\ 0\le y\le\frac{3}{2}$ ларги кўра,

$$S_y = 2\pi\int\limits_0^{3/2}\sqrt{2y}\sqrt{1+\frac{1}{2y}}\,dy = 2\pi\int\limits_0^{3/2}\sqrt{2y+1}\,dy = 2\pi\int\limits_1^2 t^2dt = \frac{2\pi}{3}t^3\Big|_1^2 = \frac{2\pi}{3}(8-1)=\frac{14\pi}{3}\ \text{кв.б.}$$

бу интегрални ҳисоблашда $2y+1=t^2,\ dy=tdt,\ 1\le\tau\le2$ алмаштириш бажарилди.

<u>4-Мисол.</u> $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ астроиданинг Ох ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг юзи аниқлансин.

<u>Ечилиши.</u> $x'=-3a\cos^2 t\sin t,\ y'=3a\sin^2 t\cos t.$



$$S_x = 2\cdot 2\pi\int\limits_0^{\pi/2} a\sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 4\pi a\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\,dt = 12\pi a^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos t\,dt =$$

$$=12\pi a^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 t\,d\sin t = \frac{12}{5}\pi a^2\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2} = 2{,}4\pi a^2\ \text{кв.б.}$$

<u>5-Мисол.</u> $\rho=\sqrt{\cos 2\theta}$ лемнискатанинг $\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right)$ қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг юзи ҳисоблансин.

<u>Ечилиши.</u> $y=\rho\sin\theta$ бўлганлигидан, $y=\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}$.

$dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$ дан эса, $dl=\sqrt{\cos 2\theta+\left(\frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2}=\frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ ни инобатга олсак, у ҳолда:

$$S_\rho = 2\pi\int\limits_0^{\pi/4}\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}.dl = 2\pi\int\limits_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta = 2\pi(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4} = 2\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=\pi\left(2-\sqrt{2}\right).$$

<u>6-Мисол.</u> $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ эллипснинг *Ox* ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми аниқлансин.

<u>Ечилиши.</u> Эллипс тенгламасини y^2 га нисбатан ечамиз ва уқ0 ва $x^2=9,\ x_{1,2}=\pm3$ бўлгани учун

$$V_x=\pi\int_{-3}^{3}\frac{4}{9}\left(9-x^2\right)dx=\frac{4}{9}\pi\left[9\int_{-3}^{3}dx-\int_{-3}^{3}x^2dx\right]=\frac{9}{4}\pi\left[9x\Big|_{-3}^{3}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{3}\right]=$$

$$=\frac{4}{9}\pi\left(27+27-9-9\right)=\frac{4}{9}\pi 36=16\pi \text{ кв.б.}$$

<u>7-Мисол.</u> $x^2-y^2=4,\ y=\pm 2$ чизиқлар билан чегараланган ясси фигура Оу ўқ атрофида айланади. Айланма жисмнинг ҳажми аниқлансин.

<u>Ечилиши.</u> $x^2=4+y^2,\ y_1=-2$ ва $y_2=2$ лардан

$$V_y=\pi\int_{-2}^{2}\left(4+y^2\right)dy=\pi\left[4\int_{-2}^{2}dy+\int_{-2}^{2}y^2dy\right]=\pi\left[4y\Big|_{-2}^{2}+\frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{2}\right]=$$

$$=\pi\left(8+8+\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\right)=\frac{64}{3}\text{ куб.б.}$$

4.4. Аниқ интеграл ёрдамида физика ва механика масалаларини ечиш.

1) а) Агар $V=f(t)$ функция моддий нуқтанинг бирор чизиқ бўйлаб ҳаракатининг тезлигини ифодаласа, у ҳолда $[t_1;t_2]$ вақт мобайнида босиб ўтилган йўл $S=\int_{t_1}^{t_2}f(t)dt$ формуласи орқали ифодаланади.

<u>1-Мисол.</u> Моддий нуқтанинг ҳаракат тезлиги $V=\left(6t^2+4\right)м/сек$ бўлса, ҳаракат бошланишидан бошлаб 5 сек. мобайнида босиб ўтилган йўл ҳисоблансин.

<u>Ечилиши.</u> Шартга кўра, $f(t)=6t^2+4,\ t_1=0$ ва $t_2=5.$

$$S=\int_0^5\left(6t^2+4\right)dt=\left(2t^3+3t\right)\Big|_0^5=2\cdot 5^3+4\cdot 5=250+20=270м.$$

<u>2-Мисол.</u> Жисмнинг ҳаракат тезлиги $V=\left(18t-3t^2\right)м/сек$ бўлса, унинг ҳаракат бошланишидан то ҳаракат тугагунга қадар босиб ўтган йўли ҳисоблансин.

<u>Ечилиши.</u> Жисмнинг ҳаракат бошланиши ва тугаши пайтидаги тезлиги нолга тенг. Ҳаракат қайси пайтда тугашини аниқлаймиз, унинг учун $18t-3t^2=0$ тенгламани ечамиз. Бундан: $3t(6-t)=0$ ва $t_1=0,t_2=6.$

$$S=\int_0^6\left(18t-3t^2\right)dt=\left(9t^2-t^3\right)\Big|_0^6=9\cdot 6^2-6^3=36\cdot 3=108м.$$

<u>3-Мисол.</u> Агар жисм ер сиртининг юзасидан вертикал ҳолатда юқорига томон $V=\left(29{,}4-9{,}8t\right)м/сек$ тезлик билан отилган бўлса, у ҳолда жисм энг кўпи билан неча метр баландликка кўтарилади?

<u>Ечилиши.</u> Жисм энг катта баландликка t вақтнинг шундай бир пайтида эришадики, ўша пайтда $\vee=0$ бўлади.

Демак, $24{,}9-9{,}8t=0$ дан $t=3сек$.

$$S=\int_0^3(29{,}4-9{,}8t)dt=\left(29{,}4t-4{,}9t^2\right)\Big|_0^3=44{,}1м.$$

б) Айтайлик, моддий нуқта ўзгарувчан *F(x)* куч таъсирида *Ox* ўқ бўйлаб тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган бўлсин. Моддий нуқта *xқa* ҳолатдан *xқb* ҳолатга кўчганда, ушбу кучнинг бажарган иши $A=\int_a^b F(x)dx$ формула билан ҳисобланади.

Эслатма. Кучнинг бажарган ишини ҳисоблашга доир масалаларни ечишда, кўпинча Гук қонунининг формуласи Fқrx дан фойдаланилади (r-пропорционаллик коэффициенти).

4-Мисол. Агар пружина 60 Н куч остида 0,02м чўзиладиган бўлса, уни 0,12м чўзиш учун қанча иш бажарилиши керак бўлади?

Ечилиши. Гук қонунига кўра, пружинани *x* м га чўзувчи куч *Fқrx*. Агар xқ0,02 м бўлса, Fқ60H. Демак,

$r=\dfrac{60}{0{,}02}=3000$ ва $F=3000x$. Натижада:

$$A=\int_0^{0{,}12}3000xdx=1500x^2\Big|_0^{0{,}12}=1500\cdot 0{,}0144=21{,}6(Ж).$$

5-Мисол. Агар пружинанинг дастлабки узунлиги 0,1 м га тенг бўлиб, пружинани 0,01 м га чўзиш учун 20Н куч керак бўлса, уни 0,12 м дан 0,14 м га чўзиш учун қанча иш бажариш керак бўлади?

Ечилиши. $к=\dfrac{20}{0{,}01}=2000$ **ва** $F=2000x; a=0{,}12-0{,}1=0{,}02$ **ва** $b=0{,}14-0{,}1=0{,}04.$

$$A=\int_{0{,}02}^{0{,}04}2000xdx=1000x^2\Big|_{0{,}02}^{0{,}04}=1000(0{,}0016-0{,}0004)=1{,}2(Ж).$$

2) а) Маълумки, бирор *l* ўқдан *r* масофада бўлган *m* массали моддий нуқтанинг *l* ўқига нисбатан статик моменти деб, $M_l=mr$ миқдорга айтилар эди. Фараз қилайлик, *xOy* координаталар текислигида тенгламаси $y=f(x)$ бўлган моддий эгри чизиқнинг бирор *AB* ёйи $a\le x\le b$ қаралаётган бўлсин. Унинг ҳар бир нуқтасида зичлик эса $\gamma=\gamma(x)$ каби функция билан ифодалансин. У ҳолда *AB* ёйнинг *Ox* ва *Oy* ўқларга нисбатан статик моментлари мос ҳолда қуйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$M_x=\int_a^b\gamma(x)\cdot y\cdot\sqrt{1+y'^2}dx,$$

$$M_y=\int_a^b\gamma(x)\cdot x\cdot\sqrt{1+y'^2}dx,$$

Хусусан агар $\gamma(x)=\gamma$ ўзгармас сон бўлса (эгри чизиқ бир жинсли бўлганда), юқоридаги формулалар қуйидагича кўринишида ёзиладилар:

$$M_x=\gamma\int_a^b ydl,\ M_y=\gamma\int_a^b xdl.$$

Бу ерда, $dl=\sqrt{1+y'^2}dx$ - ёй узунлигининг элементи.

б) Шунингдек эгри чизиқнинг АВ ёйи оғирлик маркази $P_0(x_0;y_0)$ нуқтанинг координаталари қуйидаги формула билан топилади:

$$x_0=\frac{\int_a^b \gamma(x)\cdot xdl}{\int_a^b \gamma(x)dl},\quad y_0=\frac{\int_a^b \gamma(x)\cdot ydl}{\int_a^b \gamma(x)dl}$$

ёки агар $\gamma(x)=\gamma$ ўзгармас сон бўлса

$$x_0=\int_a^b\frac{xdl}{\int_a^b dl},\quad y_0=\int_a^b\frac{ydl}{\int_a^b dl}$$

в) Айтайлик, xOy координаталар текислигида $y=f(x)$ эгри чизиқ, Ox ўқи ва $x=a$, $x=b$ вертикал тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция қаралаётган бўлиб, унинг зичлиги ҳам яна $\gamma=\gamma(x)$ каби узлуксиз функция бўлсин.

Ушбу эгри чизиқли трапециянинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан статик моментлари қуйидаги формулалардан аниқланади:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b\gamma(x)y^2dx,\ M_y=\int_a^b\gamma(x)\cdot xydx$$

Агар $\gamma=const\neq 0$ бўлса, яъни эгри чизиқли трапеция биржинсли бўлса, юқоридаги формулалар қуйидаги кўринишда ёзилади.

$$M_x=\frac{\gamma}{2}\int_a^b y^2dx,\ M_y=\gamma\int_a^b xydx.$$

г) Юқорида қаралган эгри чизиқли трапециянинг оғирлик маркази $P_0(x_0;y_0)$ нуқтанинг координаталари қуйидагича ҳисобланади:

$$x_0=\frac{\int_a^b\gamma(x)xydx}{\int_a^b\gamma(x)ydx},\ y_0=\frac{1}{2}\frac{\int_a^b\gamma(x)y^2dx}{\int_a^b\gamma(x)ydx}$$

ёки агар $\gamma=const\neq 0$ бўлса,

$$x_0=\frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx},\ y_0=\frac{1}{2}\frac{\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}$$

6-Мисол. Тенгламаси $y=\sqrt{x}$ бўлган параболанинг абциссалари *хқ0* ва *хқ4* бўлган нуқталарга мос келувчи ёйининг координата ўқларига нисбатан статик моментлари ҳисоблансин.

Ечилиши. $\gamma=1$ деб оламиз $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ бўлганлиги учун

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}=\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}};$$

$$M_x=\int_0^4\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{4x+1}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(4x+1)^3}\Big|_0^4=\frac{1}{3}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

$$M_y=\int_0^4 x\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}dx\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{4x^2+x}dx=\int_0^4\sqrt{x^2+\frac{x}{4}+\frac{1}{64}-\frac{1}{64}}dx=$$

$$\int_0^4\sqrt{\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{64}}dx=\left[\frac{x+\frac{1}{8}}{2}\sqrt{x^2+\frac{x}{4}}-2\ln\left|x+\frac{1}{8}+\sqrt{x^2+\frac{x}{4}}\right|\right]_0^4=$$

$$=\frac{33}{16}\sqrt{17}-2\ln\left|\frac{33}{8}+\sqrt{17}\right|+2\ln\frac{1}{8}=\frac{33\sqrt{17}}{16}+\ln\left|\frac{1}{8\left(\frac{33}{8}+\sqrt{17}\right)}\right|^2=$$

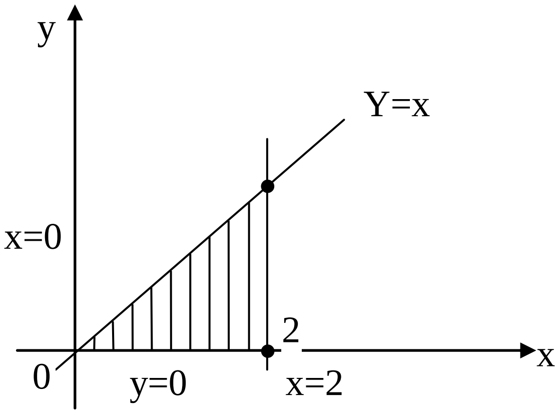
$$=\frac{33\sqrt{17}}{16}-2\ln\left(33+8\sqrt{17}\right);$$

7-Мисол. $y=x, x=2, y=0$ тўғри чизиқлар билан чегараланган учбурчакнинг координата ўқларига нисбатан статик моментлари ҳисоблансин.

Ечилиши. $\gamma=1$ деб оламиз.

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^2 y^2dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3};$$

$$M_y=\int_0^2 xydx=\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3};$$



8-Мисол. Тенгламаси $x^2+y^2=4$ бўлган айлананинг юқори ярим палласи оғирлик марказининг координаталари ҳисоблансин.

Ечилиши. Бу ерда ҳам $\gamma=1$ деб оламиз. $y=\sqrt{4-x^2}$ дан

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \text{ ва } M = \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$x_0 = \frac{\int_{-2}^{2} \frac{2xdx}{\sqrt{4-x^2}}}{\int_{-2}^{2} \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}} = \frac{-2\sqrt{4-x^2}\Big|_{-2}^{2}}{2\arcsin\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2}} = 0;$$

$$y_0 = \frac{\int_{-2}^{2} 2dx}{\int_{-2}^{2} \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}} = \frac{4}{2\arcsin 1} = \frac{4}{\pi};$$

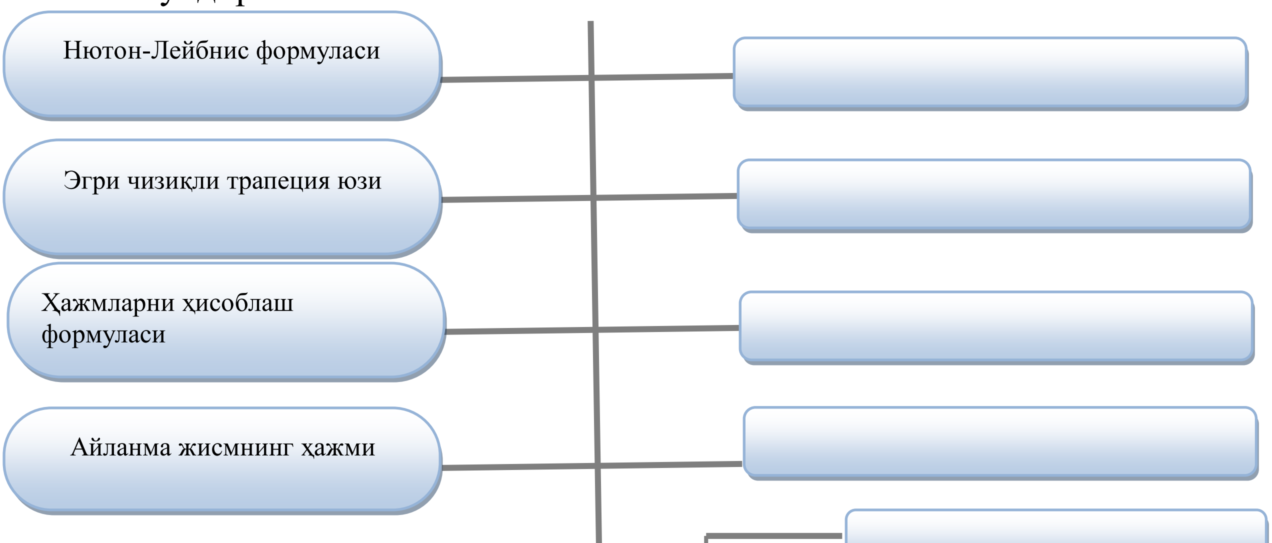
<u>9-Мисол.</u> 7-мисолдаги учбурчакнинг оғирлик маркази топилсин.

<u>Ечилиши.</u> $x_0 = \frac{\int_{0}^{2} x^2dx}{\int_{-2}^{2} xdx} = \frac{\frac{x^3}{3}\Big|_0^2}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^2} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{4}{3}$; $y_0 = \frac{\frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^2dx}{\int_{-2}^{2} xdx} = \frac{\frac{x^3}{6}\Big|_0^2}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^2} = \frac{\frac{8}{6}}{2} = \frac{2}{3}$;

Мустақил ечиш учун

1. $y = 1 - x \; va \; y = 3 - 2x - x^2$ чизиқлар билан чегараланган фигурани юзини ҳисобланг.
2. $y = x + 2, \; y = 1, x = 0, x = 2$ чизиқлар билан чегараланган фигурани абсиссалар ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини топинг.
3. $y = 2x^2$ ва $y = x + 1$ чизиқлар билан чегараланган соҳанинг юзини топинг.
4. $y = 2x$ ва $y = x + 3, x = 0, x = 1$ чизиқлар билан чегараланган фигурани абсиссалар ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини топинг

5. Тўлдиринг



4-ТАНЛОВ МАВЗУСИ: МАТЕМАТИКА ДАРСЛАРИДА ҲОСИЛА ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИНИ ЎҚИТИШ МЕТОДИКАСИ

1-Мавзу: Ҳосила ва унинг маънолари, уларни ўқитиш методикаси (2 соат амалий).

Ҳосилани ҳисоблаш қоидалари, ҳосиланинг геометрик ва физик маънолари ва уларга оид мисоллар ечиш.

Xosilani xisoblash koidalari

1.Xakikiy kursatkichli darajali funktsiyaning xosilasi: $(x^r)^1$formula urinli.
2.Yigindini xosilasi xosilalar yigindisiga teng $(f(x)+g(x)^1=f^`(x)+g^1(x)$.
3.Uzgarmas kupaytuvchini xosila belgisi tashkarisiga chikarish mumkin. $(s\bullet f(x))^1=c\bullet f^1(x)$
4.Kupaytmaning xosilasi: $(f(x)\bullet g(x))^1=f^1(x)g(x)+f(x)g^1(x)$
5.Bulinmaning xosilasi: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^1=\frac{f^1(x)\bullet g(x)-f(x)\bullet g^1(x)}{g^2(x)}$

Misollar: a) $f(x)=x^3-x^2+x-3$ xosilasi topilsin.
Yechish: $f^`(x)=(x^3-x^2+x-3)^1=(x^3)^1-(x^2)^1+(x)^1-(3)^1=3x^2-2x+1$.

b) Agar f(x)=$\frac{1}{4}x^5-3x^3+7x-17$ bulsa f `(-2) ni xisoblang.

Yechish. f `(x)=$\left(\frac{1}{4}x^5\right)^1-\left(3x^3\right)^1+(7x)^1-(17)^1=\frac{1}{4}(x^5)^1-3(x^3)^1+7(x)^1=$

$=\frac{5}{4}x^4-9x^2+7;\ f^`(-2)=\frac{5}{4}(-2)^4-9\bullet(-2)^2+7=-9$.

v) $f(x)=3x^2-5$, $g(x)=2x+7$ bulsa $(f(x)\bullet g(x))^1=?$
Yechish. $(f(x)\bullet g(x))^1=((3x^2-5)\bullet(2x+7))^1=(6x^3+21x^2-10x-35)^1=18x^2+42x-10$.

d) f(x)=$\frac{x^3}{x^2+1}$ funktsiya xosilasini toping.

Yechish: f \`(x)=$\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)^1=\dfrac{(x^3)^1\bullet(x^2+1)-(x^2+1)^1\bullet x^3}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3x^2(x^2+1)-x^3 2x}{(x^2+1)^2}=$

$=\dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$

Misollar yechish:

a) $2x^3-3x^2+6x+1$, $-3x^3+2x^2-x-5$,

b) Agar $f(x)=x^2-2x+1$, $f(x)=-x^3+x^2$, $f(x)=x^2+x+1$ bulsa f \` (0), f \` (2) ni toping.

s) $(x-2)^2\bullet x^3$, $(x^2-x)\bullet(x^3+x)$, $(x-1)\bullet\sqrt{x}$

d) f \` (1) ni toping f(x)=$\dfrac{2x-1}{2x+1}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

f \`(x)=$\dfrac{2x-3}{5-4x}$, $f(x)=\dfrac{2x^2}{1-7x}$, $f(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}}$

e) $f(x)=x^3-2x$, $f(x)=-x^2+3x+1$, $f(x)=x^3+2x^2-7x+1$

$f(x)=x^4+4x^3-8x^2-5$ f(x) funktsiya xosilasining kiymati nolga teng buladigan nuktalarni toping.

Hosilaning geometrik ma'nosi.

Funksiya hosilasi deb, funksiya grafigining x_0 nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisiyentiga aytiladi:

$$k=tg\alpha=f'(x_0)$$

Agar $M_o(x_o,\ y_o)$ ya'ni $M_o(x_o;\ f(x_o))$ nuqtaga o'tkazilgan urinma tenglamasini y=kx+b ko'rinishda olsak, urinma shu $M_0(x_0,\ f(x_o))$ nuqtadan o'tgani uchun $f(x_0)=kx_0+b\Rightarrow b=f(x_0)-kx_0$.

Bu holda

$y=kx+b\Rightarrow y=kx+f(x_o)-kx_0\Rightarrow y=f(x_o)+k(x-x_o)\Rightarrow y=f(x_o)+f(x_o)(x-x_o)$ -urinma tenglamasi.

Misol. $y=\dfrac{1}{x}$ giperbolaning $x=x_o=l$ ya'ni (1;1) nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

$y(x_o)=f(l)==l$; $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$; $f'(l)=-l$ $\qquad$ $y=l-l(x-l)$ => $y=2-x$.

Hosilaning mexanik ma'nosi.

Hosilaning mexanik ma'nosi harakatlanayotgan moddiy nuqtaning ma'lum momentdagi oniy tezligini ifodaydi.

Teskari funksiyaning hosilasi.

Teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremani isbotsiz keltirib o'taylik.

1-teoiema. Agar y=f(x) funksiya [a,b] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, shu kesmada o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, bu funksiyaga teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud bo'ladi. y=f(x) ga teskari bo'lgan funksiyani topish uchun tenglamani x ga nisbatan yechish kerak.

2-teorema. Agar y=f(x) funksiya x nuqtada chekli f '(x) $\neq$0 hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiyaga teskari bo'lgan x= φ (y) funksiya ham shu nuqtada φ'(y)= $\frac{1}{f'(x)}$ hosilaga ega bo'ladi.

2-Мавзу: Ҳосиланинг татбиқларини ўқитиш методикаси (2 соат амалий).

Ҳосиланинг татбиқлари. Иккинчи тартибли ҳосила ва унинг татбиқи. Ҳосила ёрдамида функцияни текшири ва графигини ясаш, экстремал масалаларда ҳосиланинг татбиқларига доир мисол ва масалалар ечиш. Юқори тартибли ҳосилалар.

Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma va normal tenglamalar

$y=f(x)$ egri chiziq berilgan, uning $M(x_0;y_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini topish talab qilinadi. $M(x_0;y_0)$ dan o'tuvchi har qanday to'gri chiziq tenglamasi $y-y_0=k(x-x_0)$ ko'rinishda edi. Bu to'g'ri chiziq $y=f(x)$ ning urinmasi bo'lgan holda $k=y'=f'(x)$ bo'ladi. Shunday qilib, $M(x_0;y_0)$ nuqtadagi urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $y-y_0=f'(x)\cdot(x-x_0)$.

Urinish nuqtasi (urinmaga) perpendikulyar bo'lib o'tadigan to'g'ri chiziqqa egri chiziqning shu nuqtadagi *normali* deb ataladi. Normal tenglamasi $y-y_0=-\frac{1}{f'(x)}\cdot(x-x_0)$ kabi bo'ladi.

Misol. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}$ = 1 ellipsining absissa 3 bo'lgan nuqtasida o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini toping .

Yechish $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \end{array}\right\}$ $\quad \frac{3^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

$\frac{y^2}{16}=1-\frac{9}{25}; y^2=\frac{25-9}{25}\cdot 16; y^2=\frac{16^2}{25}; y=\pm\frac{16}{15}\cdot x=3$ bo'ladigan nuqta $A\left(3;3\frac{1}{5}\right)$va $B\left(3;-3\frac{1}{5}\right)$ekan.

$A\left(3;3\frac{1}{5}\right)$ni olaylik.

b)$\left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}\right)'=(1)'\to\frac{2x}{25}+\frac{2y\cdot y'}{16}=0;$ yoki $\frac{y\cdot y'}{8}=-\frac{2x}{25};\quad y'=-\frac{16}{25}\cdot\frac{x}{y};$ A nuqtada:

$y' = -\frac{16}{25} \cdot \frac{3}{16} = -\frac{3 \cdot 5 \cdot 16}{25 \cdot 16} = -\frac{3}{5};$ v) $y - \frac{16}{25} = -\frac{3}{5}(x-5);$ $5y - 16 = -3x + 15$ yoki

$3x + 5y - 31 = 0$. Bu egri chiziqqa $A\left(3;3\frac{1}{5}\right)$ nuqtada urinma tenglamasidir.

g) Normalning tenglamasini topamiz:

$$y - \frac{16}{25} = -\frac{1}{3}(x-3); \qquad y - \frac{16}{5} = \frac{5}{3}(x-3)$$

$$15y - 48 = 25x - 75; \quad 25x - 15y - 27 = 0.$$

Funksiyaning o`sishi va kamayishi

Bu temada $[a,b]$ kesmaning ichki ($a<x<b$ bo'ladigan) nuqtasida chekli hosilaga ega bo'lgan *y=f(x)* funksiya xosslarini o'rganamiz.

1- t e o r e m a. *f(x) funksiya [a,b] kesmada o'zgarmas bo'lishi uchun (a, b) oraliqda bo'lishi zarur va yetarlidir.*

2-t e o r e m a. *y=f(x) funksiya [a,b] oraliqda kamayadigan (o`smaydigan) bo'lishi uchun uning* $f'(x)$ *hosilasi (a,b) intervalning har bir nuqtasida manfiymas (musbat), yani* $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$ *bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Funksiyaning ekstremumlari

Tarif. Agar x_0 ning yetarlicha kichik atrofidagi hamma nuqtalar uchun $f(x_0)>$ *f(x)* bo'lsa , *y=f(x)* funksiya uchun $x = x_0$ *maksimum nuqta* deb ataladi; agar x_0 ning yetarlicha kichik atrofidagi hamma nuqtalar uchun $f(x_0) < f(x)$ bo'lsa, $x = x_0$ *minimum nuqta* deb ataladi.

Funksiyaning yoki maksimumi va minimumi uning ekstremal qiymatlari yoki qisqacha , *ekstremumlari* deyiladi.

Tarifdan ko'rinadiki , ekstremum tushunchasi funksiyaning lokal (kichik uchastkaga xos) xususiyati ekan.

1-t e o r e m a. *Differensiallanuvchi funksiyaning ekstremum nuqtadagi hosilasi nolga tengdir.*

Funksiyaning max va min topishning 1-qoidasi

y=f(x) funksiyaning maksimum va minimumini topishning quyidagi sxemasini keltiramiz.

1) $y' = f'(x)$ topiladi.

2) $f'(x) = 0$ tenglama yechilib , kritik (urinmasi O_x ga $\parallel$ bo'ladigan) nuqtalarning $(x_1 x_2 x_3 ... x_k)$ absissalari topiladi.

3) har bir kritik nuqta aloxida aloxida tekshiriladi. $x = x_i$ ning yaqin atrofida *h<0* uchun ekstremumlar quyidagicha aniqlanadi:

f'(x) hosilaning x_1 kritik nuqtadan o'tishdagi ishorasi			Kritik nuqtaning harakteri
$x<x_1$	$x=x_1$	$x>x_1$	
+	f'(x)=0 yoki mavjud emas	-	Maksimum
-	f'(x)=0 yoki mavjud emas	+	Minimum
+	f'(x)=0 yoki mavjud emas	+	Funksiya o'sadi
-	f'(x)=0 yoki mavjud emas	-	Funksiya kamyadi

Misollar.**1.** $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ funksiyaning ekstremumlari topilsin.

Yechish. 1. $y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 2x + 2)$;

2. $y' = 5 \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0$.

$x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$;

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$ kritik nuqtalar absissalari.

3. a) $x=x_1=1$ atrofida y' ning ishorasi qanday uzgarishini tekshiramiz , 1 dan kichikroq qiymat olamiz .

$y' = f'(0,8) = 0;\quad (x^2 - 2x + 2) = 6(x-1)(x-2) = (0,8-1)(0,8-2) > 0$ va 1 dan kattaroq qiymatda:

$$y' = f'(1,2) = 6(1,2-1)(1,2-2) < 0.$$

Hosila ishorasini (+) dan (-) ga o'zgartiryapti , demak, $x=1$ kritik nuqta ekan.

b) $x=x_2=2$ atrofida:

$$\left.\begin{aligned} y' &= f'(1,8) = 6 \cdot (1,8-1)(1,8-2) < 0 \\ y' &= f'(2,2) = 6 \cdot (2,2-1) \cdot (2,2-2) > 0 \end{aligned}\quad \text{va} \right\}$$

Demak ,$x=x_2=2$ minimum nuqta ekan.

4) $y_{max}=f(1)=2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - = 2 - 9 + 12 - 2 = 3$

$$y_{min} = f(2) = 2 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 2 = 16 - 36 + 24 - 2 = 2$$

Quyidagi funksiyalarning ekstremumlarini toping.

2. $y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5$

3. $y = 2x^2 - 4x + 1$

4. $y = -x^2 - 6x - 1$

Egri chiziqning qavaqriqligi va botiqligi. Bukilish (egilish) nuqtasi.

Agar *y=f(x)* egri chiziq [*a*,*b*] oraliqda usuvchi bo'lsa, u xolda bu oraliqda *y'>0* bo'ladi. Bunda ikki xol ro'y berishi mumkin. *M* nuqtaning kichik atrofida o'tkazilgan urinmalar egri chiziq *botiq* (pastga qavariq) deb ataladi.Yani *M* nuqtada o'tkazilgan urinmalar egri chiziq ustida yotgan holda egri chiziq *qavariq* (pastga botiq) deb ataladi.

Agar egri chiziq $x=x_0$ nuqtaning kichik atrofida chap tomonida urinma ustida, ung tomonida esa urinma ostida joylashsa , yoki aksincha bo'lsa ,$x=x_0$ nuqta egri chiziqning *bukilish (egilish)* nuqtasi deyiladi. Boshqacha aytganda *y=f(x)* egri chiziqning qavariqlik botiqlikdan ajralgan nuqtasi egri chiziqning bukilish nuqtasi deyiladi.

1-teorema. $x=x_0$ *nuqtada* $y''=f''(x_0)$ *chekli son bo'lib ,* $y''=f''(x_0)<0$ *bo'lsa, bu nuqtada egri chiziq yuqoriga qavariq;,* $y''=f''(x_0)>0$ *bo'lsa , bu nuqtada pastga qavariq bo'ladi.*

$f'(x_1) > f'(x_2)>f'(x_3)>\ldots$ bo'ladi, yani $y'=\phi(x)$ *kamyuvchi funksiya bo'lib,* $y''=\phi'(x)$ kamayuvchi funksiya bo'lsa, $y''=\phi'(x)<0$ bo'ladi.

Bu teoremadan bukilish nuqtani topish qoidasi kelib chiqadi: *y=f(x)* ning bukilishi nuqtasini topish uchun:

1) $y''=f''(x)$ topiladi; 2) $f''(x)=0$ tenglama yechilib , uning $x_1 x_2 x_3 \ldots x_k$ yechimlari topiladi;

3) $x=x_1$ atrofida

va $\left.\begin{array}{l} f''(x<x_1)<0 \\ f''(x>x_1)>0 \end{array}\right\}$

yoki

va $\left.\begin{array}{l} f''(x<x_1)<0 \\ f''(x>x_1)>0 \end{array}\right\}$ bo'lsa, yani $f''(x)$ hosila x_1 nuqtadan o'tishida ishorasini o'zgatirsa $x=x_1$ bukilish nuqtasi bo'ladi va h.k.

Agar *f(x)* o'z ishorasini o'zgartirmasa , bukilish nuqtasi bo'lmaydi.

Misollar. 1. $y=-x^3+3x^2-4$ ning bukilish nuqtasini toping.

Yechish. a) $y'=-3x^2+6x; y''=-6x+6.$ b) $-6x+6=0;6 \quad 6x=6; x=1$

v) $\left.\begin{array}{l} y''=f''(0{,}9)=6\cdot(1-x)=6\cdot(1-0{,}9)>0, \\ y''=f''(1{,}1)=6\cdot(1-1{,}1)=-6\cdot 0{,}1<0. \end{array}\right\}$

$f''(x)$ hosila ishorasini o'zgartiryapti , demak , bukilish nuqtasi $x=1$ ekan.

2. $y'=4x^3$ ning bukilish nuqtaini toping.

Yechish. a) $y'=4x^3, y^4 = f''(x)=12x^2$;

b) $12x^2=0, x=0$;

v) $y''=f''(-0{,}1)=12\cdot(0{,}1)=12\cdot(-1)^2=12>0.$
$y''=f''(+0{,}1)=12\cdot(+1)^2=12>0.$

$f''(x)$ ishorasini o'zgartirmayapti, demak, $x=0$ bukilish nuqta emas.

Funksiya maksimumi va minimumini topishining 2-qoidasi

Teorema . *$y=f(x)$ ning ikkinchi tartibli hosilasi $y''=f''(x)$ maksimum nuqtada manfiy , minimum nuqtada bo'ladi.*

Chindan ham , $x=x_0$ maksimum nuqta bo'lsa , $y=f(x)$ funksiya qavariq (quyiga botiq) bo'lib bu nuqtada (1-chi teoremaga ko'ra) $y''=f''(x_0)<0$, minimum nuqtada $y''=f''(x_0)>0$ bo'ladi.

1. $y'=f'(x)$ *va* $y''=f''(x)$ lar topiladi.
2. $y'=f'(x)=0$ tenglama yechilib ekstremal nuqtalarning absissalari $x_1, x_2, \dots x_k$ lar topiladi.
3. $y''=f''(x)$ ning har bir kritik nuqtadagi ishorasi topiladi.
4. Agar $f''(x_i)>0$ bo'lsa , funksiya minimumga , $f''(x_i)<0$ bo'lsa funksiya maksimumga ega bo'ladi.

Misollar. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ ning ekstremumlarini toping.

Yechish :

a) $y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2 \cdot (x^2 - 4x + 3),$

$y'' = 20x^3 - 60x^2 + 30x,$

$y'' = 10x(2x^2 - 6x + 3),$

b) $5x^2(x^2 - 4x + 3) = 0,$

$x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=3$.

v) $y'' = f''(0) = 0;$

$y'' = f''(1) = 10 \cdot (2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3) = 10(-1) < 0.$

$y' = f''(3) = 10 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 3) = 10 \cdot 3^2 \times (6 - 6 + 3) = 270 > 0;$

$x=1$ maksimum $\qquad$ $x=3$ minimum

Egri chiziqning asimptotalari

Egri chiziqlarni cheksiz shaxobchali va bunday shaxobchalarga ega bo'lmagan deb ikkiga ajratsa bo'ladi. Masalan parabola ikkita cheksiz shaxobchali, giperbola to'rtta cheksiz shaxobchali bo'lib , ellips bunday shaxobchaga ega emas.

Ta r i f. Agar $y=f(x)$ egri chiziqdagi M nuqtadan birorta m to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofa tinimsiz kamaya borib M cheksiz uzoqlashgan bu masofa nolga intilsa, m to'g'ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning *asimptotasi* deyiladi. Endi berilgan egri chiziq asimptotasi tenglamaini tuzish usulini kursatamiz.

Asimptotlar 3 xil: vertikal, og'ma, gorizantal bo'ladi. Faraz qilaylik, $y=f(x)$ egri chiziq berilgan bo'lsin. $y=kx+b$ uning og'ma asimptomasi bo'lsin. k va b ni topamiz, $M(x,y)$-egri chiziqning biror nuqtasi, MN egri chiziqdan to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofa.

Ta'rifga ko'ra $x \to \infty$ yoki $y \to \infty$ da $MN \to 0$ bo'lishi kerak. $M(x,y)$ nuqtada $kx-y+b=0$ to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofa.

Funksiyani tekshirishni umumiy sxemasi

Yuqorida bayon etilganlarga ko'ra funksiyani tekshirish quyidagi taxminiy planini tavsiya etish mumkin.
1) *y=f(x)* funksiyaning aniqlanish sohasi , uzluksilik sohasi va uzulishi nuqtalari topiladi. Uzilish nuqtalarida funksiyaning bir tomonlama limitlari topiladi.
2) Funksiyaning simmetrikligi va davriyligi aniqlanadi,
3) *y=f(x)* grafigining O_x va O_y uqlar bilan kesishish nuqtalari topiladi hamda funksiya ishorasi uzgarmaydigan soxalar belgilanadi;
4) Funksiyaning ekstremum nuqtalari hamda o'sish va kamayish sohalari, funksiyaning ekstremal qiymatlari topiladi;
5) Funksiyaning bukilish nuqtalari, botiq va qavariq bo'lish sohalari topiladi,
6) Tekshirilayotgan funksiyaning asimptotalari topiladi;
7) Funksiya grafigi chiziladi.

Misol $y = e^{-x}$ funksiyani to'liq tekshiring.

Yechish . 1) $y + \Delta y = e^{-(x+\Delta x)^2}$

$$\Delta y = e^{-(x+\Delta x)^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}[e^{-2x\Delta x}e^{-(\Delta x)^2} - 1].$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [e^{-2x\Delta x}e^{0(\Delta x)^2} - 1] = e^{-x^2}(e^0 \cdot e^0 - 1) = e^{-x^2}(1-1) = 0$$

Demak, funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz.

2) $f(x) = f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x}$,

Funksiya *Oy* uqqa nisbatan simmetrik.

Davriymas:

3) $\left.\begin{aligned} y &= e^{-x^2} \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} e^{-x^2} \neq 0$ va $e^{-x^2} > 0$

Funksiya *Ox* o'q bilan kesishmaydi, *Ox dan yuqorida yotadi , ishorasi* $(-\infty, \infty)$ oraliqda musbat.

$$\left.\begin{aligned} y &= e^{-x^2} \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} y = e^0 = 1$$

A(0;1) nuqtada *Oy* uqini kesadi.

4) a) $y' = (e^{-x^2})' = -2x \cdot e^{-x^2}$;

b) $y'' = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x(-2x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2 + 4x^2) = 2 \cdot e^{-x^2}(2x^2 - 1)$;

v)-2*x*= e^{-x^2}=0; *x*=0 ekstremum nuqta.

c) $y'' = f(0) = 2e^0(0-1) = -2 < 0.$

Demak ,*x*=0 maksimum nuqta. Funksiya (-∞,0) oraliqda usuvchi ,(0,+∞) oraliqda kamayuvchi.

5) $y'' = 2 \cdot e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0,$

$2x^2$-1=0 yerdan: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ va $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ lar funksiya grafiginining bukilish nuqtalari . Demak funksiya : $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda botiq , $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda qavariq. $(+\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ oraliqda botiq.

6)Asimptotalarni topamiz:

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{e^{-x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x\cdot e^{-x^2}}=0; b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(0\cdot x-e^{-x^2})=-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0.$ *y=kx+b* dan *y=0.*

$y=e^{-x^2}$ uchun *Ox* uq asimptomasi ekan.

7) Funksiya grafigini chizamiz

1) $x^2+y^2=5$ egri chiziqqa *M(-1,2)* nuqtadan utkazilgan urinma va normal tenglamasini toping.

Javob: *2y-x=5* va *y+2x=0*

2) $y=\sqrt{2x+1}$ egri chiziqqa x_0=4 nuqtadagi normal tenglamasini tuzing.

Javob: *3x+y-15=0*

3) $y=\frac{x}{x^2-1}$ egri chiziqqa x_0=2 nuqtada utkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

Javob: $y=-\frac{3}{25}x+\frac{16}{25}$

4) Quyidagi funksiyalarning usish va kamayish oraligini toping: $y=x^3-3x^2+5$.

Javob: $(-\infty,0),(2,+\infty)$ da usadi; (0,2) da kamayadi.

5) $y=x^4+4x-6$

Javob: $(-1,+\infty)$ oraliqda usadi, $(-\infty,-1)$ oraliqda kamayadi.

6) $y=x^2-3x+1$

Javob: $(-\infty,\frac{3}{2})$ oraliqda kamayadi, $(\frac{3}{2},+\infty)$ oraliqda usadi.

7) $y=2x^2+8x-1$.

Javob: $(-\infty,-2)$ oraliqda kamayadi, $(-2;+\infty)$ oraliqda usadi.

Quyidagi funksiyalarni maksimum va minimumlarini toping.

8) $y=x^2-2x$

Javob: x=1 nuqtada minimum.

9) $y=2x^2+3x+4$

Javob: $x=-\frac{3}{4}$ nuqtada minimum.

10) $y=\frac{1}{3}x^3-x$

Javob: x=-1 nuqtada maksimum, x=1 nuqtada minimum.

11) $y=x^3$

Javob: Maksimumi ham minimumi ham yoq.

12) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+6$

Javob: x=-1 nuqtada maksimum, x=4 nuqtada minimum.

13) $y=x^4-3x^3+22x^2-24x+12$

Javob: x=1, x=3 nuqtalarida minimum, x=2 nuqta maksimum.

14) $y=\frac{e^x}{x}$ va $y=\frac{4x^2+25}{10x}$ funksiyalarning maksimum va minimumlari bormi ?

Mustaqil yechish uchun misollar.
Quyidagi funksiyalarning grafigini yasang

1. y = $\frac{1}{2}x^2+2$.

2. **y =** x^2-6x+5.

3. y = $\frac{1}{3}x^3-4$.

4. y = $\frac{1}{4}x^4-8x$.

5. y = $2-x-x^3$.

6. y **=** $\log_3 x$.

7. y = $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$.

8. y = $x+\frac{1}{x}$.

9. y = $\frac{1}{1-x^2}$.

10. y = $\frac{1}{x}$.

11. y = sin x.

12. y = e^x.

Differensialning taqribiy hisoblashlarga tatbiqi

Differensialni taqribiy hisoblashlarga tatbiqini misollar orqali ko'rsatamiz .

1. $y=4x^2+2x-1$ da x=2 va $\Delta x=dx=0{,}001$bo'lsa , Δy ni toping .

Yechish. $\Delta y\approx dy=d(4x^2+2x-1)=(8x+2)\cdot dx=(8\cdot 2+2)\cdot 0{,}001=18\cdot 0{,}001=0{,}018$.

Δy ning haqiqiy qiymati quyidagicha bo'ladi :

Δy=

$4\cdot 2{,}001^2+2\cdot 2{,}001-1-(4\cdot 2^2+2\cdot 2-1)=16{,}016004+3{,}002-19=19{,}018004-19=0{,}018004$
.

2. Radiusi 20 sm li bir jinsli metal shar qizdirilgach uning radiusi 20,01 sm bo'lib qoldi. Sharning hajmi qanchaga oshgan?

Yechish. $R=x=20sm\ \Delta R=\Delta x=dx=0.01sm.$

$$v_{shar} = y = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot x^3 .$$

$$\Delta y = dy = \ldots ?$$

$$\Delta y \approx dy = d(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot x^3) = (\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot x^3) \cdot dx = dx = \frac{4}{3}\pi \cdot x^2 \cdot dx.$$

$$\Delta y \approx dy = 4\pi \cdot x^2 \cdot dx = 4\pi \cdot 20^2 \cdot 0{,}01 = 4 \cdot \pi \cdot 4{,}00(sm^3) = 16 \cdot \pi(sm^{30}).$$

$$\Delta y = \frac{4}{3}\pi \cdot (20{,}01^3 - 20^3) = \frac{4}{3}\pi \cdot (8012{,}006 - 8000) = 4 \cdot 4{,}002 \cdot \pi = 16{,}008\pi.$$

Funksiyaning son qiymatini topishga tatbiqi

3. $\sin 31^0$ ni xisoblang.
Yechish. $y=\sin x$ funksiyani olamiz.

$$\left.\begin{array}{l} x = 30^\circ \\ \Delta x = dx = 1^\circ \end{array}\right\} y + \Delta y = f(x + \Delta x) \cong f(x) + dy = \sin x + d(\sin x) = \sin x + \cos x \cdot dx.$$

$$\sin(30^\circ + 1^\circ) \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot 1^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\frac{\pi}{180} \cdot 1) = \frac{1}{2} + \frac{1{,}732 \cdot 3{,}14}{2 \cdot 180} \approx 0{,}5 + 0{,}0015 = 0{,}515;$$

b) $y=x^n$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = x = 1 \\ \Delta x = \alpha \end{array}\right\}$ bo’lib , α <<1 bo’lsa,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y \approx f(x) + dy = x^n + d(x^n) = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot dx$$ dan

$(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n \cdot \alpha$ (a) bo’ladi.

Masalan: $1{,}015^2 \approx 1 + 2 \cdot 0{,}015 = 1{,}03.$

$0{,}988^3 \approx 1 - 3 \cdot 0{,}012 = 0{,}964.$

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. P.Ibragimov “Matematikadan masalalar to’plami”, O’quv qo’llanma, Toshkent, “O’qituvchi”-1995 yil.
2. Н.Б.Истомина, Н.Б.Тихонова “Учимся решать комбинаторные задачи”, Математика и информатика 1-4 классы, Москва, 2015 г.
3. P.Azimov, H.Sherboyev, Sh.Mirhamidov, A.Karimova “Matematika”, O’quv qo’llanma, Toshkent, “O’qituvchi”-1992 yil.
4. J. Ikromov “Maktab matematika tili”, Toshkent, “O’qituvchi”-1992 yil.
5. T.Yoqubov, S.Kallibekov “Matematik mantiq elementlari”, Toshkent, “O’qituvchi”-1996 yil.
6. T.Yoqubov “Matematik mantiq elementlari”, Toshkent,“O’qituvchi”-1983 y.
7. Sirojiddinov S.X., Mamatov M. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent, O’qituvchi, 1978 y.
8. Gmurman V.E.Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent, O’qituvchi, 1977 y.
9. Gmurman V.E. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar echish bo’yicha qo’llanma. Toshkent, Ukituvchi, 1980 y.

ЭЛЕКТРОН ТАЪЛИМ РЕСУРСЛАРИ

1. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги: www.edu.uz.
2. Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирлиги: www.uzedu.uz.
3. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги ҳузуридаги Бош илмий-методик марказ: www.bimm.uz
4. Тошкент давлат педагогика университети ҳузуридаги халқ таълими ходимларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш ҳудудий маркази: www.giu.uz
5. Ижтимоий ахборот таълим портали: www. Ziyonet. uz.
6. http://www.school.edu.ru - Umumta’lim portali (rus tilida).
7. http://www.alledu.ru - “Internetdan ta’lim” portali (rus tilida).
8. http://www.rostest.runnet.ru - Test olish markazi serveri (rus tilida).
9. http://www.allbest.ru - Internet resurslari electron kutubxonasi (rus tilida).
10. http://www.mathtype.narod.ru/ - Online-darsliklar (rus tilida).
11. http://mschool.kubsu.ru/ - Elektron qo’llanmalar kutubxonasi. Sirtqi matematik olimpiadalar.
12. http://mat-game.narod.ru/ - Matematik gimnastika. Matematik masalalar va boshqotirmalar.
13. http://mathc.chat.ru/ - Matematik kaleydoskop (rus tilida),
14. http://mathmag.spbu.ru/ - Internetdagi matematuk jurnal (rus tilida),
15. http://www.matematik1.narod.ru/ - Matematikadan masalalar (rus tilida),
16. , maruzalar, kitoblar.

17. http://www.gov.uz - O‘zbekiston Respublikasi Hukumati portali.
18. http://www.istedod.uz – “Iste’dod” jamg‘armasi sayti.
19. http://www.edunet.uz – maktablar, o‘quvchi va o‘qituvchilar sayti.
20. http://www.mathematics.ru - "Matematika” ochiq kolleji sayti.
21. http://www.math.ru - Matematika va ta’lim sayti.
22. http://www.math.ru – Moskva uzluksiz matematik ta’lim markazi sayti.