SAMARQAND VILOYAT PEDAGOGLARNI YANGI
METODIKALARGA O‘RGATISH MILLIY MARKAZI

ANIQ VA TABIIY FANLAR METODIKASI KAFEDRASI

Z.OCHILOV, S. UMAROV

KO‘RSATKICHLI, LOGARIFMIK TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLARNI O‘RGANISH USULLARI

(Umumta’lim maktablarning matematika fani o‘qituvchilari uchun uslubiy ko‘rsatma)

SAMARQAND-2023

Ko‘rsatkichli, logarifmik tenglamalar va tengsizliklarni o‘rganish usullari. (Umumta’lim maktablarning matematika fani o‘qituvchilari uchun uslubiy ko‘rsatma). Samarqand VPYMO‘MM. 2023-yil. 26 bet

Tuzuvchilar: **Z.Ochilov -** Samarqand Davlat Universiteti Differensial tenglamalar kafedrasi dotsenti

S. Umarov– Samarqand viloyat pedagoglarni yangi metodikalarga o‘rgatish milliy markazi aniq va tabiiy fanlar metodikasi kafedrasi o‘qituvchisi

Taqrizchilar: **F.Gafarova**–Samarqand shahar 6-maktab o‘qituvchisi.

Sh.Abduyev–Samarqand Samarqand VPYMO‘MM aniq va tabiiy fanlar metodikasi kafedrasi o‘qituvchisi

Uslubiy ko‘rsatma Markaz Ilmiy kengashining 2023-yil 26-iyundagi 2-sonli yig‘ilishi qaroriga asosan nashrga tavsiya etilgan.

Kirish

Matematika fani yoshlarning mantiqiy fikrlash qobiliyatini o‘stiruvchi vosita sifatida qadimgi Yunoniston maktablarida o‘qita boshlangan. Yangi era boshlarida Xitoyda sonlar nazariyasi, Hindistonda o‘nli sanoq sistemasi, O‘rta Yer dengiz sohillarida trigonometriya yaratila boshlangan. VII-VIII asrlardan boshlab ilm-fan taraqqiyotining markazi O‘rta Osiyoga ko‘chdi. O‘z ilmiy ishlari bilan butun dunyoga tanilgan Muhammad Muso al-Xorazmiy, Ahmad Farg‘oniy, Abu Rayhon Beruniy, Abu Ali ibn Sino, Abu Nasr Forobiy, Ismoil Buxoriy, Umar Hayyom, Ulug‘bek va boshqalar O‘rta Osiyoda yashab ijod qilganlar.

Ijobiy taffakkur sohibini, ya’ni o‘sayotgan, rivojlanayotgan va taraqqiyot sari yuz tutayotgan mamlakatimiz uchun zarur bo‘lgan ijodkor va mustaqil fikrlay oladigan shaxsni tarbiyalab, voyaga yetkazish oldimizda turgan eng muhim va dolzarb vazifa hisoblanadi.

Bir necha nostandart mulohazalar yordamida yechiladigan tenglama va tengsizliklar murakkab masalalar hisoblanadi. Bunday masalalarga modul va logarifm qatnashgan hamda Nyuton binomiga doir masalalarni aytish mumkin.

Matematikaning turli bo‘limlariga taaluqli murakkab masalalarni yechishda ko‘pincha matematik induksiya usulidan ham foydalaniladi. Shuningdek, masalalar yechishning nostandart usullari umumta’lim maktablar dasturiga kiritilmaganligi sababli umumta’lim maktablarda klassik tengsizliklardan foydalanib yechiladigan masalalarga kam e’tibor beriladi. Shuning uchun klassik tengsizliklar, n-darajali Nyuton binomi, modul hamda logarifmga taaluqli ba’zi formulalar va ular yordamida yechiladigan 50 tadan ortiq masalani (yechimlari bilan) keltirishni lozim topdik.

Ko‘rsatkichli, logarifmik tenglamalar va tengsizliklarni o‘rganish usullari nomli uslubiy ko‘rsatma akademik litsey, o‘rta maktab o‘quvchilari va o‘qituvchilari foydalanishlari mumkin.

Bu uslubiy ko‘rsatma matematikani chuqurlashtirish va murakkab tadbiqiy masalalarni yechishga katta yordam beradi.

1. Ko‘rsatkichli va logarifmik tenglamalar

1.1. $6^x - 2^x = 32$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamani oddiy usulda yechish ko‘zlangan maqsadni bermaydi. Tanlash yo‘li bilan $x_1 = 2$ ni osongina topish mumkin. Berilgan tenglamaning ikkala tomonini 2^x ga bo‘lib, $3^x - 1 = \frac{32}{2^x}$ tenglamani hosil qilish mumkin. Uning chap tomoni o‘suvchi va o‘ng tomoni kamayuvchi bo‘lib, bu tenglama yagona ildizga ega bo‘ladi.

1.2. $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani unga teng kuchli bo‘lgan: $(3^x)^2 + (2^x)(3^x) - 2(2^x)^2 = 0$ ko‘rinishda yozish mumkin. Uning ikkala tomonini $(2^x)^2$ ga bo‘lib, va $\left(\frac{3}{2}\right)^x = u$ almashtirish yordamida ildizlari $u_1 = 1, u_1 = -2$ bo‘lgan $u^2 + u - 2 = 0$ kvadrat tenglamani hosil qilish mumkin.$u > 0$ bo‘lib, $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$ va $x_1 = 0$.

1.3. $x^{x+1} + x^x = 1$ tenglamani yeching.

Yechish.Tenglama ikki tomonini logarifmlab unga teng kuchli: f(x)=x$\ln x$+$\ln(x+1)$=0 tenglamani qaraymiz. 0<x<$\frac{1}{e}$ bo‘lganda,

$$\ln(x+1) < x,$$

$$x\cdot \ln x + \ln(x+1) < x\cdot \ln x + x = x\cdot \ln\frac{x}{e}.$$

x>$\frac{1}{e}$ bo‘lsa, u holda $f'(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{1+x} = \ln(xe) + \frac{1}{1+x} > 0$. Demak, f(x) funksiya x>0 da monoton o‘suvchi, ya’ni tenglama bittadan ko‘p bo‘lmagan ildizga ega va bu ildizning taqribiy qiymati 0,43605.

1. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$ tenglamani yeching.

Yechish. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 1$ bo‘lib, birinchi qo‘shiluvchi y bo‘lsa, u holda ikkinchi qo‘shiluvchi $\frac{1}{y}$ bo‘lib, berilgan tenglama $y + \frac{1}{y} = 4$ ko‘rinishni oladi va natijada, ildizlari $y_1 = 2 + \sqrt{3}$ hamda $y_2 = 2 - \sqrt{3}$ bo‘lgan $y^2 + 4y + 1 = 0$ tenglama hosil bo‘ladi.

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = y$ tenglikdan $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}$ va $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$ tenglamalarni hosil qilish mumkin.

Birinchi tenglamadan $x_1 = 2$, ikkinchisidan esa $x_2 = -2$ bo‘ladi.

1.5. $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamaning ikkala tomonini 5 asosga ko‘ra logarifmlab:

$$x + 3\frac{x-1}{x}\log_5 2 = 3 + 2\log_5 2,$$

$$x^2 + x(\log_5 2 - 3) - 3\log_5 2 = 0,$$

$$x_1 = 3; x_2 = \log_5 2$$

1.6. Quyidagi tenglamani yeching.

$\left(26+15\sqrt{3}\right)^x - 5\left(7+4\sqrt{3}\right)^x + 6\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 5.$

Yechish. $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = y$ belgilash yordamida $\left(26+15\sqrt{3}\right)^x = y^3$, $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x = y^2$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = \frac{1}{y}$ tengliklarni hosil qilish mumkin va berilgan tenglama $y^4 - 5y^3 + 6y^2 - 5y + 1 = 0$ (∗) ko‘rinishni oladi.

$y \neq 0$ bo‘lib, tenglamaning ikkala tomonini y^2 ga bo‘lib, hamda $y + \frac{1}{y} = z$ almashtirish yordamida

$y^2 - 5y + 6 - \frac{5}{y} + \frac{1}{y^2} = 0$, $\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 5\left(y + \frac{1}{y}\right) + 6 = 0$, $(z^2 - 2) - 5z + 6 = 6$ yoki $z^2 - 5z + 4 = 0$ tenglamani hosil qilish mumkin, $z_1 = 1$, $z_2 = 4$, $z = y + \frac{1}{y}$ va $y > 0$ .U holda Koshi (3) tengsizligiga ko‘ra: $z \geq 2$

Demak, $z = 4, y + \frac{1}{y} = 4$ yoki $y^2 - 4y + 1 = 0$ bo‘lib, $y_1 = 2 + \sqrt{3}$ va $y_2 = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Demak, $x_1 = 1$ va $x_2 = -1$.

1.7. $4^x - (7-x)2^x + 12 - 4x = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglama 2^x ga nisbatan kvadrat tenglama bo‘lib uning ildizlari:

$(2^x)_{1,2} = \frac{7-x\pm\sqrt{(7-x)^2-4(12-4x)}}{2} = \frac{7-x\pm\sqrt{x^2+2x+1}}{2} = \frac{7-x\pm|x+1|}{2} = \frac{7-x\pm(x+1)}{2}$

bo‘ladi.

Bundan $2^x=\frac{7-x+(x+1)}{2}=4$ va $2^x=\frac{7-x-(x+1)}{2}=3-x$ tenglamalarni hosil qilib, birinchi tenglamadan $x_1=2$, ikkinchi tenglama esa bittadan ko‘p ildizga ega emas. Chunki uning chap tomoni uzluksiz o‘suvchi o‘ng tomoni esa uzluksiz kamayuvchi funksiya. Tanlash usuli bilan $x_2=1$ ni topish mumkin.

1.8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{6}\right)^x-\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^x=1$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagicha shakl almashtirish mumkin:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^x-\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^x-1=0,$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x-\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\right)=0,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x+1\right)+\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x-1\right)=0.$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x+1+\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^x\right)=0,(*)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x+1+\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^x>0$$

bo‘lib, $(*)$ tenglamadan $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x-1=0$ yoki $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}$. Bundan $x_1=-1$.

1.9. $x\cdot 2^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot 2^x=4$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning o‘ng tomoni musbat, u holda $x>0$ bo‘lib, Koshi (2) va (3) tengsizliklariga ko‘ra:

$$x2^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}2^x\geq 2\sqrt{\left(x2^{\frac{1}{x}}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}2^x\right)}=2\sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}}\geq 2\sqrt{2^2}=$$

Bundan va berilgan tenglamadan hamda qo‘llanilgan Koshi tengsizliklariga asosan: $\begin{cases}x2^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\mathrm{x}}2^{\frac{1}{x}},\\ x+\frac{1}{x}=2\end{cases}$ bo‘lib, u yagona: $x_1=1$ ildizga ega. $x_1=1$ ni berilgan tenglamaga qo‘yib tekshirib ko‘rib uning berilgan tenglama ildizi ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

1.10. $2^{1-|x|}-1=x^2+\frac{1}{x^2+1}$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani $2^{1-|x|}=x^2+1+\frac{1}{x^2+1}$ (∗) ko‘rinishda yozib $x\geq 0$ bo‘lganligidan (∗) tenglama chap tomoni uchun $2^{1-|x|}\leq 2$ bo‘lib, o‘ng tomoni uchun Koshi (3) tengsizligiga ko‘ra: $x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\geq 2$.

Demak, (∗) tengsizlizligidagi tenglik uning ikkala tomoni ham 2 ga yoki $x_1=0$ bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi.

1.11. $\frac{x}{14}=\left(\frac{2}{7}\right)^{\log_x 4}$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamaning aniqlanish sohasi: $x>0$ va $x\neq 1$

Tenglamaning ikkala qismini x asosga ko‘ra logarifmlab: $\log_x x-\log_x 14=\log_x 4\cdot\log_x\frac{2}{7}$ yoki

$1-\log_x 2-\log_x 7=2\log_x 2\cdot(\log_x 2-\log_x 7)$ (∗)

tenglamani hosil qilish mumkin.

$\log_x 2=a$ va $\log_x 7=b$ belgilash yordamida (∗) tenglamani $1-a-b=2a(a-b)$ yoki $2a^2-a(2b-1)+b-1=0$ ko‘rinishida yozib hamda uni a o‘zgaruvchiga nisbatan yechib,

$$a_{1,2}=\frac{2b-1\pm\sqrt{(2b-1)^2-8(b-1)}}{4}=\frac{2b-1\pm(2b-3)}{4}$$

tengliklarga ega bo‘lish mumkin.

Bunda ikki hol bo‘ladi:

1. Agar $a=\frac{2b-1+2b-3}{4}=b-1$ bo‘lsa, $\log_x 2=\log_x 7-1$ bo‘lib, $\log_x\frac{7}{2}=1$ yoki $x_1=\frac{7}{2}$ bo‘ladi.

2. Agar $a=\frac{2b-1+2b+3}{4}=\frac{1}{2}$ bo‘lsa, $\log_x 2=\frac{1}{2}$, $\sqrt{x}=2$ yoki $x_2=4$ bo‘ladi.

1.12. $x^{\sqrt{\log_x 5}}+x^{\sqrt{\log_5 x}}=2\sqrt{5}$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $x>1$. Logarifmning xossasidan foydalanib:

$$x^{\sqrt{\log_x 5}} = x^{\frac{\log_x 5}{\sqrt{\log_x 5}}} = x^{\log_x 5 \cdot \sqrt{\log_5 x}} = \left(x^{\log_x 5}\right)^{\sqrt{\log_5 x}} = 5^{\sqrt{\log_5 x}}$$

tenglikni hosil qilish mumkin.

Demak, berilgan tenglama $5^{\sqrt{\log_5 x}} = \sqrt{5}$ tenglamaga teng kuchli bo‘lib, $\sqrt{\log_5 x} = \frac{1}{2}, \log_5 x = \frac{1}{4}$ va $x_1 = \sqrt[4]{5}$.

Eslatma. Ushbu tenglamani yechishda logarifmning yana bir yuqori sinf o‘quvchilari uchun foydali bo‘lgan xossasidan foydalanildi.

Agar $a > 1, b > 1$ bo‘lsa, u holda $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Ushbu tenglikni isbotlash uchun tenglikning ikkala tomonini b asosga ko‘ra logarifmlash yetarli: $\sqrt{\log_a b} \cdot \log_b a = \sqrt{\log_b a}$ bo‘lib, $\sqrt{\log_a b} = \frac{1}{\sqrt{\log_b a}}$, u holda:

$\sqrt{\log_a b} \cdot \log_b a = \frac{1}{\sqrt{\log_b a}} \cdot \log_b a = \sqrt{\log_b a}.$

1.13. $4^{\lg x} - 32 + x^{lg4} = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $x > 0$ va $x \neq 1$ bo‘lib, (17) formulaga ko‘ra berilgan tenglama $4^{\lg x} - 32 + 4^{lgx} = 0$ yoki $4^{lgx} = 16$ ko‘rinishni oladi va $lgx = 2$ yoki $x_1 = 100$ bo‘ladi.

1.1 $4^{\log_3(1-x)} = (2x^2 + 2x + 5)^{\log_3 2}$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $x < 1$.

Logarifmning xossalariga ko‘ra: $4^{\log_3(1-x)} = 2^{\log_3(2x^2+2x+5)}$ yoki $2^{2\log_3(1-x)} = 2^{\log_3(2x^2+2x+5)}$

Bundan quyidagilarni hosil qilish mumkin:

$$2\log_3(1-x) = \log_3(2x^2 + 2x + 5),$$

$$(1-x)^2 = 2x^2 + 2x + 5,$$

$$(1-x)^2 = 2x^2 + 2x + 5,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + 2x + 5,$$

$x^2 + 4x + 4 = 0$ yoki $(x+2)^2 = 0$

Demak, berilgan tenglama $x_1 = -2$ ildizga ega.

1.15. $3\lg x^2 - lg^2(-x) = 9$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $x < 0$ tengsizlik bilan aniqlanadi.

Logarifmlash qoidalariga ko‘ra: $6lg|x| - \lg^2(-x) = 9$ bo‘lib, $x < 0$ bo‘lganligi uchun

$$6\lg(-x) - lg^2(-x) = 9$$

$(\lg(-x) - 3)^2 = 0$, $\lg(-x) = 3$ yoki $x_1 = -1000$.

1.16. $\lg(x+10) + \frac{1}{2} lgx^2 = 2 - lg4$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $x \neq 0$ va $x > -10$ shartni qanoatlantiradi $\frac{lgx^2}{2} = lg|x|$ tenglikdan foydalanib berilgan tenglama $\lg(x+10) + lg|x| + lg4 = 2$ ko‘rinishga kelib logarifmning xossalariga asosan:

$$lg(|x| \cdot (x+10)) = 2 \text{yoki } 4|x| \cdot (x+10) = 100) \qquad (*)$$

bo‘lib, bunda ikki hol bo‘lishi mumkin:

$x > 0$ bo‘lsin, u holda $|x| = x$ bo‘lib, $(*)$ tenglama

$4x(x+10) = 100$ yoki $x^2 + 10x - 25 = 0$

ko‘rinishni oladi va ildizlari $x_{1,2} = -5 \pm 5\sqrt{2}$.

Demak, $x > 0$ bo‘lganda berilgan tenglamaning ildizi

$x_1 = 5\sqrt{2} - 5$.

$-10 < x < 0$ bo‘lsin, u holda $|x| = -x$ bo‘lib, $(*)$ tenglama

$-4x(x+10) = 100$ yoki $x^2 + 10x + 25 = 0$, $(x+5)^2 = 0$

ko‘rinishga keladi va $x_2 = -5$.

1.17. $\log_2\left(1 + \sqrt{x^4 + x^2}\right) + \log_2(1 + 2x^2) = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. $\sqrt{x^4 + x^2} \geq 0$ va $x^2 \geq 0$ bo‘lganligidan:

$1 + \sqrt{x^4 + x^2} \geq 1$ va $1 + 2x^2 \geq 1$

tenglik doim o‘rinli bo‘ladi. U holda: $\log_2\left(1 + \sqrt{x^4 + x^2}\right) \geq 0$ va $\log_2(1 + 2x^2) \geq 0$ natijada, quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi

$\log_2\left(1 + \sqrt{x^4 + x^2}\right) + \log_2(1 + 2x^2) \geq 1$.

Bundan va berilgan tenglamadan: $\begin{cases} \log_2\left(1 + \sqrt{x^4 + x^2}\right) = 0 \\ \log_2(1 + 2x^2) = 0 \end{cases}$ bo‘lib, berilgan tenglama yagona $x_1 = 0$ ildizga ega.

1.18. Quyidagi tenglamani yeching.

$$|\log_2(2x+7)| = \log_2(1+|x+3|) + \log_2(1-|x+3|)$$

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $\begin{cases} 2x+7>0, \\ 1-|x+3|>0 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi yordamida aniqlanadi, ya'ni $-3{,}5 < x < -2$.

Berilgan tenglamaning chap tomoni nomanfiy bo'lib, o'ng tomonini quyidagicha baholash mumkin:

$$\log_2(1+|x+3|) + \log_2(1-|x+3|) =$$

$$= \log_2(1-(x+3)^2) \le \log_2 1 = 0.$$

Natijada, berilgan tenglama uning ikkala tomoni ham 0 ga teng bo'lgandagina o'rinli bo'ladi.

$$\begin{cases} \log_2(2x+7) = 0, \\ \log_2(1-(x+3)^2) = 0. \end{cases}$$

Demak, $x_1 = -3$ bo'lib, o'zgaruvchining bu qiymatini berilgan tenglamaga qo'yib $x_1 = -3$ haqiqatan berilgan tenglamaning ildizi ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

1.19. $\log_{\sqrt{x}}(x+|x-2|) = \log_x(5x-6+5|x-2|)$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamada $x>0$, $x \ne 1$

$u = x + |x+2|$ belgilash yordamida $\log_{\sqrt{x}} u = \log_x(5u-6)$ yoki $\log_x u^2 = \log\ (5u-6)$ (bu yerda $u > \frac{6}{5}$) va undan ildizlari $u_1 = 2, u = 3$ bo'lgan $u^2 - 5x + 6 = 0$ tenglamani hosil qilish mumkin.

$u = x + |x-2|$ bo'lganligi uchun: $x + |x-2| = 2$ bo'lsin. Agar $0 < x < 1$ yoki $1 < x \le 2$ bo'lsa, u holda $|x-2| = -x+2$ bo'lib, bu tenglik doim to'g'ri, ya'ni $x + (-x+2) = 2$.

$x + |x-2| = 3$ bo'lsin. Bu tenglamaning yagona $x_2 = \frac{5}{2}$ ildizini osongina topish mumkin.

Demak, berilgan tenglama $0 < x < 1$ va $1 < x \le 2$ oraliqlar hamda $x_2 = \frac{5}{2}$ da o'rinli ekan.

1.20. $log_2^2 x + (x-1)\cdot\log_2 x + 2x - 6 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Ushbu tenglama $\log_2 x$ ga nisbatan kvadrat tenglama bo'lib,

$$(\log_2 x)_{1,2} = \frac{-x+1 \pm \sqrt{(x-1)^2 - 4(2x-6)}}{2} = \frac{-x+1 \pm \sqrt{x^2 - 10x + 25}}{2}$$
$$= \frac{-x+1 \pm (x-5)}{2}$$

Agar $\log_2 x = \frac{-x+1+x-5}{2} = -2$ bo‘lsa, $x_1 = \frac{1}{4}$ bo‘ladi.

Agar $\log_2 x = \frac{-x+1-x+5}{2} = 3 - x$ bo‘lsa, u holda $\log_2 x = 3 - x$ $(*)$ tenglama hosil bo‘ladi.

$u = \log_2 x$ funksiya o‘zining aniqlanish sohasida uzluksiz va o‘suvchi bo‘lib, $v = 3 - x$ funksiya esa uzluksiz va kamayuvchidir.

Demak, $(*)$ tenglama bittadan ko‘p bo‘lmagan ildizga ega. Tanlash yo‘li bilan bu ildiz $x_2 = 2$ ekanligini osongina topish tmumkin.

Javob: $x_1 = \frac{1}{4}$ va $x_2 = 2$.

1.21. $\log_{x^2}(x^2 - 12) - \log_{-x}\sqrt{2-x} = 1$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $x < 0$ va $x \neq -1$.

$x < 0$ shartdan va logarifm xossalaridan foydalanib:

$\log_{|x|}(x^2 + 12) - \log_{-x}(2 - x) = 2$,

$\log_{-x}(x^2 + 12) - \log_{-x}(2 - x) = 2$, $\log_{-x}\frac{x^2+12}{2-x} = 2$,

$\frac{x^2+12}{2-x} = x^2$ yoki $x^3 - x^2 + 12 = 0$,

$(x+2)(x^2 - 3x + 6) = 0$ va $x^2 - 3x + 6 > 0$

bo‘lganligi uchun berilgan tenglama yagona $x_1 = -2$ ildizga ega.

1.22. $\frac{2-4\cdot\log_{12} 2}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \frac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $-2 < x < 8$ va $x \neq -1$.

$\frac{\log_a f(x)}{\log_a g(x)} = \frac{\log_b f(x)}{\log_b g(x)}$ tenglik ixtiyoriy 1 dan farqli musbat a va b sonlar uchun o‘rinli bo‘ladi.

Bu tenglikdan foydalanib berilgan tenglamani

$\frac{\log_{12} 9}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \frac{\log_{12}(8-x)}{\log_{12}(x+2)}$,

$\log_{12} 9 - \log_{12}(x+2) = \log_{12}(8-x)$,

$(x+2)(8-x)=9$ yoki $x^2+6x-7=0$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Bu tenglamaing ildizlari $x_1=7$ va $x_2=-1$. Ammo $2<x<8$ va $x\neq -1$ bo‘lganligidan berilgan tenglama yagona $x_1=7$ ildizga ega.

1.23. $x=\lg(9x+1)$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama manfiy ildizlarga ega emasligi ko‘rinib turibdi, $x_1=0$ esa ildizi bo‘ladi.

Berilgan tenglamani $10^x=1+9x$ yoki $(1+9)^x=1+9x$ ko‘rinishda yozib olib, Bernulli (6) tengsizligiga ko‘ra, ixtiyoriy n-natural soni uchun $(1+x)^n\geq 1+nx$ tengsizlik o‘rinli bo‘lib, tenglik $n=1$ bo‘lganda bajariladi, ya’ni $(1+9)^x=1+9x$ tenglama yagona musbat $x_2=1$ butun ildizga ega.

Demak, $x_1=0$ va $x_2=1$.

Mustaqil yechish uchun misollar

Tenglamalarni yeching.

1. $\sqrt{2^{x^2-2x-10}}=\sqrt{33+\sqrt{128}}-1,\ \{-3;5\}$;

2. $3^{2x^2}-2\cdot 3^{x^2+x+6}+3^{2x+12}=0,\ \ \{-2;3\}$;

3. $2\sqrt{x}\cdot 4^x+5\cdot 2^{x+1}+2\sqrt{x}=2^{2x+2}+5\sqrt{x}2^x+4,\ \ \{2;4\}$;

$\sqrt{1+\log_x\sqrt{27}}\cdot\log_3 x+1=0,\ \ $ x=$\frac{1}{9}$;

5. $\log_2(x+1)^2+\log_2(x+1)=6,\ \ \ \{-5;3\}$;

6. $\frac{1}{\log_6(3+x)}+\frac{2\log_{1/4}(4-x)}{\log_2(3+x)}=1,\ \ $ x=3;

7. $(\log_a c)^{\log_b log_a{}^2 x}+\log_a c=\log_a ac$ (($\log_a x)^{\log_b\log_a c}$)(1) a$\neq c, 0<a\neq 1$,$0<b\neq 1$,$0<c\neq 1$ bo‘lsa, u holda $x_1=a, x_2=a^b$;2) 0< $a=c\neq 1$,$0<b\neq 1$ bo‘lsa, u holda 0< $x\neq 1$,ya’ni 1 dan boshqa barcha musbat sonlar)

8. $\sqrt[3]{1+lgtgx}+\sqrt[3]{1-lgtgx}=2,\ \ \ $ x=$\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$;

9. $(\frac{1-a^2}{2a})^x+1=(\frac{1+a^2}{2a})^x,\ \ \ $ x=2;

10. $a^{\frac{2}{x}} + b^{\frac{2}{x}} = m(ab)^{\frac{1}{x}}, a \geq 0, b \geq 0$ 1) a=b=0,x$>$ 0; 2) a=0,b$>$ 0 b=0,a$>$ 0,$\emptyset$; 3) a$\neq$ $0, b = 0, a > 0, b > 0, m > 2$

$x = \frac{lga - lgb}{\lg(m \pm \sqrt{m^2 - m}) - lg2}$; 4) a=b$>$ $0, m = 2$ x$\neq$ 0);

11. $\frac{1}{4^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{6^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{x}}}$, x=$\frac{1}{\log_{3/2} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$;

12. $2^x - 3^x = \sqrt{6^x - 9^x} x_1 = 0, \ x_2 = \frac{1}{2 - \log_2 3}$;

13. $16^{\frac{x-1}{x}} 5^x = 100, \ \{-2\log_5 2\,; 2\}$;

1 $\frac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \frac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}, \ \left\{\frac{1}{16}; 2\right\}$;

15. $x^2 \log_2 \frac{3+x}{10} - x^2 \log_{1/2}(2 + 3x) = x^2 - 4 + 2\log_{\sqrt{2}} \frac{3x^2 + 11x + 6}{10}, \ \{1; 2\}$;

16. $10^{\sqrt{lg\,x}} + x^{\sqrt{\log_x 10}} = 200$, x=$10^4$;

2. Ko‘rsatkichli va logarifmik tengsizliklar

2.1. $1 + 9^x + 16^x \leq 3^x + 4^x + 12^x$ tengsizlikni yeching.

Yechish. $3^x = a$ va $4^x = b$ almashtirishlar yordamida berilgan tengsizliklarni $1 + a^2 + b^2 \leq a + b + ab$ yoki $a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \leq 0$ ko‘rinishda yozish mumkin.

Oxirgi tengsizlikni 2 ga ko‘paytirib, so‘ngra chap tomonida to‘la kvadratlar ajratish mumkin .U holda:

$2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2a - 2b + 2 \leq 0,$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \leq 0$$

yoki

$(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \leq 0$ $(*)$ bo‘lib, $(a^2 + b^2) \geq 0$, $(a - 1)^2 \geq 0$ va $(b - 1)^2 \geq 0$ tengsizliklardan $(*)$ tengsizlik $a - b = 0$, $a - 1 = 0$ va $b - 1 = 0$ yoki $a = 1$ va $b = 1$ bo‘lib, $3^x = 4^x$ ya’ni $x = 0$ bo‘ladi.

Eslatma. Tengsizlikni yechish jarayonida ixtiyoriy x va y o‘zgaruvchilar uchun $x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 \geq 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lishi ham isbotlandi.

2.2. $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 16^x$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Quyidagicha qo‘shimcha tenglamani qaraymiz $\log_{\frac{1}{2}} x = 16^x$ (∗) bunda, 0$< x < 1$.

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ va $g(x) = 16^x$ bo‘lsin. $u = f(x)$ o‘zining aniqlanish sohasida uzluksiz va kamayuvchi $v = g(x)$ esa uzluksiz o‘suvchi bo‘lib (∗) tenglama bittadan ko‘p ildizga ega bo‘lolmaydi.Tanlash yo‘li bilan bu ildiz $x_1 = \frac{1}{4}$ ekanligini ko‘rish mumkin.

Yuqoridagilardan $\left(0;\frac{1}{4}\right]$ oraliqda $f(x) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) \geq g(x)$ tengsizlikni yozish mumkin.

Demak, $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 16^x$ tengsizlik $0 < x \leq \frac{1}{4}$ bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi.

2.3. $|\ x + 1\ |^{x^2 - \frac{5x}{2} + \frac{3}{2}} \leq 1$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Ma’lumki, |x+1 |$\neq 1$. Agar 0<$|\ x + 1\ | < 1$, ya’ni $-2 < x < -1$ yoki $-1 < x < 0$ bo‘lsa, u holda:

$x^2 - \frac{5x}{2} + \frac{3}{2} > 0$ va x$> 1{,}5$ yoki x< 1

bo‘ladi.

Demak, berilgan tengsizlik qaralayotgan oraliqda doim bajariladi.

Agar |x+1 |> 1, ya’ni x> 0 yoki x≤ -2 bo‘lsa, u holda: $x^2 - \frac{5x}{2} + \frac{3}{2} < 0$ yoki $1 < x < \frac{3}{2}$ bo‘lib, bu holda berilgan tengsizlik $1 < x < \frac{3}{2}$ shartda bajariladi.

Javob. $-2 < x < -1, -1 < x < 0, 1 < x < 1{,}5$

2. $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(\log_{x-1} 9)) > 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Tengsizlikda x- o‘zgaruvchining qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari $1 < x < 2$ va $x > 2$.

Berilan tengsizlikni unga teng kuchli bo‘lgan tengsizliklarga quyidagicha almashtirish mumkin:

$\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(\log_{x-1} 9)) > 0,$

$0 < \log_2(\log_{x-1} 9) < 1,$

$1 < \log_{x-1} 9 < 2,$

$\frac{1}{2} < \log_{x-1} 3 < 1,$

$\frac{1}{2} < \frac{1}{\log_3(x-1)} < 1,$

Oxirgi tengsizlikdan $1 < \log_3(x-1) < 2$, $3 < x-1 < 9$ va $4 < x < 10$.

Tengsizlikning aniqlanish sohasini inobatga olib (4;10) berilgan tengsizlikning yechimi bo‘lishini ko‘rish mumkin.

2.5. $x^{2lg2} \cdot 2^{-\lg x} \leq 2$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Tengsizlikning aniqlanish sohasi $x > 0$. (17) formulaga ko‘ra: $x^{lg2} = 2^{\lg x}$ bo‘lib, u holda $(2^{lgx})^2 \cdot 2^{-\lg x} \leq 2$, $2^{lgx} \leq 2$, $lgx \leq 1$, $x \leq 10$. Aniqlanish sohasi inobatga olinsa tangsizlikning yechimi $0 < x \leq 10$ bo‘ladi.

2.6. $\log_{\frac{25-x^2}{16}}(\frac{24-2x-x^2}{14}) \geq 1$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikning aniqlanish sohasi:

$$\begin{cases} \frac{25-x^2}{16} > 1, \\ 24-2x-x^2 > 0 \end{cases} \text{yoki} \begin{cases} 0 < \frac{25-x^2}{16} 1, \\ 24-2x-x^2 > 0 \end{cases}$$

tengsizliklar sistemalari bilan aniqlanadi.

Birinchi sistemadan $\begin{cases} -3 < x < 3, \\ -6 < x < \end{cases}$ bo‘lib, $-3 < x < 3$ bo‘ladi.

Ikkinchi sistemadan esa: $\begin{cases} -5 < x < 5, \\ x \leq -3, \\ -6 < x < \end{cases}$ yoki $\begin{cases} -5 < x < 5, \\ x > 3, \\ -6 < x < \end{cases}$ bo‘lib $-5 < x < -3$ yoki 3$< x < 4$ bo‘ladi.

Shunday qilib, berilgan tengsizlikning aniqlanish sohasi quyidagi uchta oraliqdan iborat:

$$-5 < x < -3, -3 < x < 3, 3 < x <$$

Agar $-3 < x < 3$ bo‘lsa, u holda:

$$\frac{24-2x-x^2}{14} \geq \frac{25-x^2}{16},$$

$$-17 \leq x \leq 1.$$

bo‘lib, tengsizlikning aniqlanish sohasini hisobga olsak, $-3 < x \leq 1$ bo‘ladi.

Agar $-5 < x < 3$ yoki 3$< x < 4$ bo‘lsa, u holda hosil bo‘lgan (x+17)(x-1)≥ 0 tengsizlikdan x$\geq$ 1 yoki x≤ -17 bo‘lib, aniqlanish sohasini hisobga olsak, 3$< x < 4$ bo‘ladi.

Javob.$-3 < x \leq 1, 3 < x <$

2.7. $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(2-|x-1|) > \log_{\sqrt{10}}(2x-x^2)$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Tengsizlikning aniqlanish sohasi $\begin{cases} 2-|x-1|>0 \\ 2x-x^2>0 \end{cases}$ sistemadan topiladi. Bundan $0 < x < 2$.

Demak, $-1 < x-1 < 1\ yoki\ |x-1| < 1$.

$2-|x-1| > 1$ tengsizlik berilgan tengsizlikning aniqlanish sohasida to‘g‘ri bo‘lib, uni $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ asosga ko‘ra logarifmlab: $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(2-|x-1|) > 0$ tengsizlikni hosil qilish mumkin.

Bundan: $0 < 2x-x^2 = 1-(x-1)^2 \leq 1$ bo‘lib, $\sqrt{10} > 1$ bo‘lganligi uchun $\log_{\sqrt{10}}(2x-x^2) \leq 0$ bo‘ladi.

Shunday qilib,

$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(2-|x-1|) > 0$ va $\log_{\sqrt{10}}(2x-x^2) \leq 0$

tengsizliklar berilgan tengsizlik aniqlanish sohasiga tegishli barcha x lar uchun o‘rinli bo‘ladi, ya’ni berilgan tengsizlikning yechimi $0 < x \leq 2$ bo‘ladi.

2.8. 0$< b < a$ shartni qanoatlantiruvchi a va b sonlari uchun quyidagi tengsizlikni isbotlang

$ln\frac{a}{b} > 2\frac{a-b}{a+b}$.

Yechish. $0 < b < a$ shartdan $a = bk$ va $k > 1$ bo‘lib, berilgan tengsizlikni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$ln\frac{bk}{b} > 2\frac{bk-b}{bk+b}, \quad lnk > 2\frac{k-1}{k+1} \qquad\qquad (*)$

$x > 1$ bo‘lganda $f(x) = \ln x - 2\frac{x-1}{x+1}$ funksiyani tahlil qilamiz. $f(1) = 0$.

$x > 1$ da $f'_x = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} > 0$ bo‘lib, bu oraliqda $f(x)$ funksiya o‘suvchi bo‘ladi.

Demak, $f(x) > f(1) = 0$ bo‘lib, $\ln x > 2\frac{x-1}{x+1}$ bo‘ladi, ya’ni $(*)$ tengsizlik va berilgan tengsizlik to‘g‘ri ekan.

2.9. $\log_{17} 19 > \log_{19} 20$ tengsizlikni isbotlang.

Yechish. Berilgan tengsizlikni isbotlash uchun $\frac{\log_{19} 20}{\log_{17} 19} < 1$ yoki $\log_{19} 17 \cdot \log_{19} 20 < 1$ tengsizlikni isbotlash kifoya. Koshi (2) tengsizligiga asosan:

$$\log_{19} 17 \log_{19} 20 \leq (\frac{\log_{19} 20 + \log_{19} 17}{2})^2 = \left(\frac{\log_{19} 340}{2}\right)^2 < \left(\frac{\log_{19} 361}{2}\right)^2 = 1.$$

Chunki, $u = \log_{19} x$ funksiya $x > 0$ da o‘suvchi va $\log_{19} 340 < \log_{19} 361$.

2.10. $\lg(n+1) > \frac{lg1+lg2+...+lgn}{n}$ tengsizlikni isbotlang.

Yechish. Logarifmning xossalariga ko‘ra: $(n+1)^n > n!$ bo‘lib, bu yerda $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ va $n \geq 1$.

Ma’lumki, $n+1 > 1$, $n+1 > 2$, $n+1 > 3$, ….. , $n+1 > n$ bo‘lib, ularni ko‘paytirish natijasida $(n+1)^n > n!$ tengsizlikni hosil qilish mumkin.

12.11. Musbat $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sonlari uchun $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ tenglik bajarilsa, quyidagi tengsizlikni isbotlang

$$x_1^{lgx_1} + x_2^{lgx_2} + \ldots + x_n^{lgx_n} \geq n.$$

Yechish. Berilgan tengsizlik chap tomonining o‘nli logarifmi uchun Koshi (1) va Koshi-Bunyakovskiy (9) tengsizliklaridan foydalanib:

$$lg\left(x_1^{lgx_1} + x_2^{lgx_2} + \ldots + x_n^{lgx_n}\right) \geq$$

$$lg\left(n \cdot \sqrt[n]{x_1^{lgx_1} \cdot x_2^{lgx_2} \cdot ... \cdot x_n^{lgx_n}}\right) =$$

$$= lgn + \frac{1}{n} \cdot (lg^2 x_1 + lg^2 x_2 + \ldots + lg^2 x_n) =$$

$$= lgn + \frac{1}{n^2} \cdot \left(\underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{n}\right) \cdot (lg^2 x_1 + lg^2 x_2 + \cdots + lg^2 x_n) \geq$$

$$\geq lgn + \frac{1}{n^2}(1 \cdot lgx_1 + 1 \cdot lgx_2 + \ldots + 1 \cdot lgx_n)^2 = lgn + \frac{1}{n^2} \cdot lg^2(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

ni hosil qilish mumkin. Shartga ko‘ra, $x_1 x_2 \ldots . x_n = 1$ bo‘lib, u holda:

$$lgn + \frac{1}{n^2} \cdot lg^2(x_1 x_2 \ldots x_n) = lgn + \frac{1}{n^2} lg^2 1 = lgn + 0 = \lg n.$$

Demak, $lg\left(x_1^{lgx_1} + x_2^{lgx_2} + \ldots + x_n^{lgx_n}\right) \geq \lg n$ bo‘lib, berilgan tengsizlikning to‘g‘riligi kelib chiqadi.

Mustaqil yechish uchun misollar.

1. $4x^2+3^{\sqrt{x}+1}+x\cdot 3^{\sqrt{x}}<2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}+2x+6$ $0\leq x<{log_3}^2 2$, x$>\frac{3}{2}$;

2. $(\frac{1}{2})^{(x^6-2x^3+1)^{1/2}}<2^{x-1}$, x$<-1, 0<x<1, x>1$;

3. $4^{1+\sqrt{x}}+3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}\leq 2^{2x}$ x≥ 4;

$(4^x-1)^2+2^{x+1}(4^x-1)<8\cdot 4^x$, $\log_2(\sqrt{5}-2)<x<\log_2(1+\sqrt{2})$;

5. $(\sqrt{5}+2)^{x-1}\geq(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$, $-2\leq x-1,\ x\geq 1$;

6. $\log_{2-x}(x+2)\log_{x+3}(3-x)\leq 0$, $-2<x\leq -1;\ 1<x<2$;

7. $\frac{\log_{x^2+3}(x+1)-\log_{x^2+3}(x^2+1)}{\log_{x^2+3}(x+2)-\log_{x^2+3}(x^2+2)}\leq 2$,   0$<x<1; x>1$;

8. $\frac{1}{\log_{x^2-16}(x^2-8x+16)}+\frac{1}{\log_{x^2-16}(x^2+8x+16)}<\frac{9}{4}$ x$<-\frac{9+\sqrt{33}}{2}; -5<x<-\sqrt{17}; -\sqrt{17}<x<-4; 4<x<\sqrt{17}; \sqrt{17}<x<5$;

9. $\log_2\log_3\frac{x+1}{x-1}<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-1}{x+1}$,   x$>2$;

10. $(lgx+1)^2<\sqrt{lgx}(\sqrt{lgx}+1)^2$, $\emptyset$;

3. Ko‘rsatkichli va logarifmik sistemalar

3.1. Quyidagi sistemani yeching:

$$\begin{cases}\log_2 x\log_x(x-3y)=2,\\ x\cdot y^{\log_x y}=y^{5/2}.\end{cases}$$

Yechish. $\log_2 x=\frac{1}{\log_x 2}$ bo‘lganligidan sistemaning birinchi tenglamasi $\frac{\log_x(x-3y)}{\log_x 2}=2$ yoki

$\log_x(x-3y)=2\log_x 2$ bo‘lib, $x-3y=4$ bo‘ladi.

Sistema ikkinchi tenglamasining ikkala tomonini x asosga ko‘ra logarifmlab:

$$\log_x(x\cdot y^{\log_x y})=\log_x y^{5/2},$$

$$1 + {log_x}^2 y = \frac{5}{2} \log_x y,$$

$$2{log_x}^2 y - 5 \log_x y + 2 = 0.$$

$\log_x y = 2$ va $\log_x y = \frac{1}{2}$ yoki y=x^2 va x=y^2 mos ravishda $3x^2 - x + 4 = 0$ va $y^2 - 3y - 4 = 0$ tenglamalarni hosil qilish mumkin.Birinchi tenglama haqiqiy ildizlarga ega emas,ikkinchi tenglamaning musbat ildizi y=4 bo‘lib, u holda: x=2 bo‘ladi.

3.2. Quyidagi sistemani yeching:

$$\begin{cases} (xy)^y \cdot x^{6x} = y^x \\ x^2 y = 1 \end{cases}$$

Yechish. $x_1 = 1$ va $y = 1$ berilgan tenglamalar sistemasining ildizlari ekanligini osongina tekshirib ko‘rish mumkin.x≠1 bo‘lsin, u holda sistemaning birinchi tenglamasini x asosga ko‘ra logarifmlab:

$$y \cdot \log_x(x) + 6x \log_x x = x \log_x y$$

yoki

$y(1 + \log_x y) + 6x = x \log_x y$ (∗)

tenglikni hosil qilish mumkin.

Ikkinchi tenglamani ham x asosga ko‘ra logarifmlab: $2 + \log_x y = 0$ yoki $\log_x y = -2$ tenglikni hosil qilib va (∗) tenglikdan: $y = 8x$ bo‘ladi.

$\log_x y = -2$ tenglikdan $y = \frac{1}{x^2}$, $8x = \frac{1}{x^2}$ va $x_2 = \frac{1}{2}$.

Shunday qilib, berilgan sistema yechimlari (1;1) va $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$. $x_1 = 1, y_1 = 1$ va $x_2 = \frac{1}{2}, y_2 =$

3.3. Quyidagi sistemani yeching:

$$\begin{cases} 3\left(2 \log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y\right) = 10, \\ xy = 81. \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning birinchi tenglamasida x asosga ko‘ra logarifmga o‘tib,quyidagi tenglamani hosil qilish mumkin:

$$3\left(\log_x y + \frac{1}{\log_x y}\right) = 10.$$

$\log_x y = a$ almashtirish yordamida ildizlari $a_1 = 3$ va $a_2 = \frac{1}{3}$ bo‘lgan

$3a^2 - 10a + 3 = 0.$

tenglamani hosil qilish mumkin. Misolning shartiga ko‘ra, mos ravishda (3;27) va (27;3) yechimlarni hosil qilish mumkin

3. Quyidagi sistemani yeching:

$$\begin{cases} y^{\log_5 x} = 64, \\ xy = 500. \end{cases}$$

Yechish. Shartga ko‘ra: $x > 0$, $x \neq 1$ va $y > 0$.

Har ikkala tenglamani 2 asosga ko‘ra logarifmlab:

$$\begin{cases} \log_5 x \log_2 y = 6, \\ \log_2 x + \log_2 y = 2 + 3\log_2 5. \end{cases}$$

Bundan:

$$\log_2 x + \frac{6}{\log_5 x} = 2 + 3\log_2 5$$

yoki

$\log_2 x + \frac{6\log_2 5}{\log_2 x} = 2 + 3\log_2 5$ $\qquad (*)$

tenglamani hosil qilish mumkin.

Yangi $\log_2 x = z$ va $\log_2 5 = a,$ z va a o‘zgaruvchilar yordamida $(*)$ tenglamadan $z + \frac{6a}{z} = 2 + 3a$ yoki $z^2 - z(2 + 3a) + 6a = 0$ tenglamani hosil qilish mumkin va bu kvadrat tenglamaning ildizlari:

$$z_{1,2} = \frac{2 + 3a \pm \sqrt{(2 + 3a)^2 - 24a}}{2} = \frac{2 + 3a \pm (2 - 3a)}{2}$$

bo‘ladi.

Agar $z_1 = 2$ bo‘lsa, $\log_2 x_1 = 2$ va $x_1 = 4$ hamda $y = \frac{500}{x}$ tenglikdan $y_1 = 125.$

Agar $z_2 = 3a$ bo‘lsa, $\log_2 x_2 = 3\log_2 5$ va $x_2 = 125, y = \frac{500}{x}$ tenlikdan $y_2 =$

3.5. Quyidagi sistemani yeching:

$$\begin{cases} 2\log_4 x^2 + \log_{0,2} y^3 = -1, \\ 2\log_4 x^4 - \log_{0,2} y = 5. \end{cases}$$

Yechish. Tenglamalar sistemasining aniqlanish sohasi $x \neq 1$ va $y > 0$. Logarifmlash qoidalariga ko‘ra: $\begin{cases} 4\log_4|x| + 3\log_{0,2} y = -1, \\ 8\log_4|x| - \log_{0,2} y = 5 \end{cases}$ $(*)$ bo‘lib, $(*)$ tenglamalar sistemasining yechimi $\log_4|x| = \frac{1}{2}$ va $\log_{0,2} y = -1$ bo‘lib bundan $x_1 = 2$, $y_1 = 5$ va $x_2 = -2$, $y_2 = 5$ lar berilgan tenglamalar sistemasining yechimi bo‘ladi.

3.6. Quyidagi tenglama b va c ning qanday qiymatlarida yechimga ega bo‘ladi

$$\begin{cases} a^{2x} + a^{2y} = 2b, \\ a^{x+y} = c, \\ a > 0. \end{cases}$$

Yechish. $a^x = u, a^y = v$ almashtirishlar yordamida quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 2b, \\ uv = c. \end{cases}$$

u va v faqat musbat qiymatlar qabul qilishligini hisobga olgan holda quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$(u+v)^2 = 2(b+c), (u-v)^2 = 2(b-c).$

Birinchi tenglamadan:

$$u + v = \sqrt{2(b+c)}\,. \qquad (*)$$

Ikkinchi tenglamada b$\geq c$ tengsizlik bajarilishini hisobga olib:

$$u - v = \pm\sqrt{2(b-c)} \qquad (**)$$

tenglikni hosil qilish mumkin.

b$\geq c$ bo‘lganda $(*)$ va $(**)$ tengliklardan berilgan sistema yechimlarini topish mumkin:

$$u_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{b+c} \pm \sqrt{b-c}\right), x_{1,2} = \log_a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c} \pm \sqrt{b-c})\right).$$

$$v_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{b+c} \mp \sqrt{b-c}\right), y_{1,2} = \log_a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c} \mp \sqrt{b-c})\right).$$

3.7. Quyidagi sistemani yeching:

$$\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$$

Yechish. Logarifmning xossalariga ko‘ra: $x^{\log_g y} = y^{\log_g x}$ tenglikdan sistemaning birinchi tenglamasini

$x^{\log_g y} + y^{\log_g x} = 4$, $x^{\log_g y} = 2$ yoki $\log_2 x \cdot \log_2 y = 3$ ko‘rinishida yozish mumkin.

Sistemaning ikkinchi tenglamasi $\log_2 x - \log_2 y = 2$ tenglamaga teng kuchli bo‘lib, berilgan tenglamalar sistemasi $\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_2 y = 3, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo‘ladi va undan $\log_2 x = 3$, $\log_2 y = 1$ va

$\log_2 x = -1$, $\log_2 y = -3$.

Shunday qilib, berilgan tenglamalar sistemasining yechimlari $x_1 = 8$, $y_1 = 2$ va $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{8}$.

3.8. Quyidagi sistemani yeching:

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \le 2, \\ \ x + 3y \ge 2 - \log_4 3\,. \end{cases}$$

Yechish. Koshi (2) tengsizligiga ko‘ra tengsizlikning chap qismi uchun quyidagilarni yozish mumkin:

$$4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \ge 2\sqrt{4^{x+y-1} \cdot 3 \cdot 4^{2y-1}} = 2\sqrt{3 \cdot 4^{x+3y-2}} \ge$$
$$2\sqrt{3 \cdot 4^{2-\log_4 3-2}} = 2.$$

Demak,

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} = 3 \cdot 4^{2y-1} \\ x + 3y = 2 - \log_4 3 \end{cases} \qquad (*)$$

sistema birinchi tenglamaning ikkala tomonini 4 asosga ko‘ra logarifmlab: $(*)$ sistemaning ikkinchi tenglamasidan $x + 3(x - \log_4 3) = 2 - \log_4 3$, $4x = 2 + 2\log_4 3$ yoki

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_4 3 = \log_4\left(2\sqrt{3}\right)$.

$y = x - \log_4 3$ tenglikdan esa $y_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_4 3 = \log_4 \frac{2}{\sqrt{3}}$ bo‘ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\begin{cases}\log_2(x+y)-\log_3(x-y)=1,\\ x^2-y^2=2\end{cases}$ $(\frac{3}{2};\frac{1}{2})$;

2. $\begin{cases}x^a=y^b,\\ \log_c\frac{x}{y}=\frac{\log_c x}{\log_c y},\\ a\neq b, ab\neq 0.\end{cases}$ x=$c^{\frac{b^2}{a(b-a)}}$; y=$c^{\frac{b}{b-a}}$.

3. $\begin{cases}\log_5 x+3^{\log_3 y}=7,\\ x^y=5^{12}.\end{cases}$ (125;4) ,(625;3)

$\begin{cases}yx^{\log_y x}=x^{5/2},\\ \log_4 y\log_y(y-3x)=1.\end{cases}$ (4;16);

5. $\begin{cases}a^x b^y=ab,\\ 2\log_a x=\log_{1/b} y\log_{\sqrt{a}} b.\end{cases}$ $(\log_a b;\log_b a), (1;1)$;

6. $\begin{cases}\log_{12} x\left(\frac{1}{\log_x 2}+\log_2 y\right)=\log_2 x,\\ \log_2 x\log_3(x+y)=3\log_3 x.\end{cases}$ (6;2),(2;6)

7. $\begin{cases}x\log_2 y\log_{1/x} 2=y\sqrt{y}(1-\log_x 2),\\ \log_{y^3} 2\log_{\sqrt{2}} x=1.\end{cases}$ $(2^{3/5};2^{2/5})$

8. $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2,\\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2,\\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2.\end{cases}$ $(\frac{2}{3};\frac{27}{8};\frac{32}{3})$

9. $\begin{cases}\log_{0,5}(y-x)+\log_2\frac{1}{y}=-2,\\ x^2+y^2=25.\end{cases}$ $(-\frac{7}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}), (3;4)$

10. $\begin{cases}x^{x+y}=y^{x-y},\\ x^2y=1,\\ x>0, y>0.\end{cases}$ (1;1),$(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\sqrt[3]{9})$

11. $\begin{cases}x^{x+y}=y^n,\\ y^{x+y}=x^{2n}y^n,\\ x>0, y>0, n>0.\end{cases}$ $(\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2};\frac{(\sqrt{8n1}-1)^2}{4})$,(1;1)

12. $\begin{cases}(3x+y)^{x-y}=9,\\ \sqrt[x-y]{324}=18x^2+12xy+2y^2.\end{cases}$ $(\frac{5}{4};-\frac{3}{4}), (-\frac{1}{4};-\frac{9}{4})$

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Сивашинский И.Х. Задачник по элементарной математике. М. Наука. 1966.

2. Шарыгин И.Ф. Математика для поступающих в ВУЗы. М. В. Дрофа. 2002.

3. Цыпкин А.Г. Справочное пособие по методам решения задач по математике. М. Наука. 1983.

Литвиненко В.Н., Мордкович А.Н. Практикум по решению задач школьной математики. М.Просвещение. 1976.

5. Дорофеев Г.В. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. М. Наука. 1973.

6. Говоров В.М., Дыбов П.Т., Сборник конкурсных задач по математике. М. Наука. 1985.

7. Сивашинский И.Х. Задачи по математике для внеклассных занятий. М. Просвещение. 1968.

9. Сивашинский И.Х. Теоремы и задачи по алгебре и элеметарным функциям. М. Нука. 1971.

10. Щклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избрфнные задачи и теоремы элементарной математики. М. Наука. 1976.

11. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. М.Наука. 1983.

12. Серпинский В.О решении уравнений в целых числах(перевод с польского) М. Государственное издательство физико-матемаической литературы. 1961.

13. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. М. Просвещение. 1976.

1 Соминский И.С. Метод математической индукции. М. Наука. 197

15. Понтрягин Л.С. Метод координат. М. Наука. 1987.

16. Иорбьев Н.Н. Числа фибоначчи. М. Наука.198

17. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов.М. Просвещение.1997.

18. Зайцев В.В., Рыжков В.В., Сканави М.И. Элементарная математика. М. Наука. 197

19. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы (1 и 2 ч.) М. Мнемозина 2010.

20. Шахно К. У. Как готовиться к прёмным экзаменам в ВУЗ по математике. Минск. Вышэйшая школа. 1973.

21. Шахно К.У. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. Минск. Вышэйшая школа. 1969.

22. Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. М. Наука. 1986.

23. Зубелевич Г.И. Сборник задач московских математических олимпиад. М.

Просвещение. 1967.

2 Тригг Ч. Задачи с изюменкой. М. Мир. 1975.

25. Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М. И. Задачи по элементарной математике. М. Наука. 1967.

26. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М. Просвещение. 1975.

27. Виленкин Н.Я., Гутер Р.С., Шварцбурд С.И., Овчинский Б.В., Ашкинузе В.Г. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов средних школ с математической специализацией. М. Просвещение. 1972.

28. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Алгубра для самообразования. М. Государственное издательство физико-математической литературы. 1960.

29. Saxayev M. Elementar matematika masalalari to‘plami. 1 va 2 qismlar. T. O‘qituvchi. 1977.

30. Kochetkov Ye.S., Kochetkova Ye.S. Algebra va elementar funksiyalar (1 va 2 q.). T. O‘qituvchi. 1967.

MUNDARIJA

Z.OCHILOV, S. UMAROV

KO‘RSATKICHLI, LOGARIFMIK TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLARNI O‘RGANISH USULLARI

Terishga berildi:____________
Bosishga ruxsat etildi:__________
Ofset bosma qog`ozi. Qog`oz bichimi 60x80 1/16
«Times» garniturasi. Ofset bosma usuli
1,75 bosma taboq
Adadi: 25 nusxa
Buyurtma №_____

Samarqand viloyati pedagoglarni yangi metodikalarga o‘rgatish milliy markazi bosmaxonasida chop etildi.

Samarqand shahar, Boysunqur ko`chasi 3-uy.